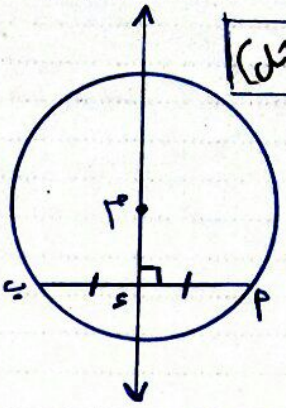
[الهندسة]

الوحدة الرابعة (الدائرة)



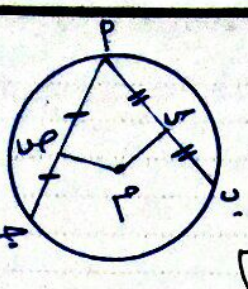
- مار بالمركز (محور تماثل)
- ينصف القاعدة
- عمودى على القاعدة

١ المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أى وتر فيها يكون عمودى على هذا الوتر

٢ المستقيم المار بمركز الدائرة وعمودياً على أى وتر فيها ينصف هذا الوتر

٣ المستقيم العمودى على وتر الدائرة من منتصفه يكون محور تماثل لها (مار بالمركز)

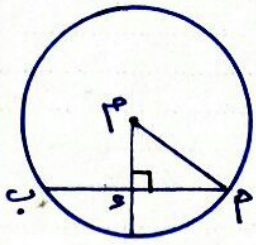
مثال ١ فى الشكل المقابل



دائرة م نصف قطرها ٣٥ سم

$\overline{م ء} \perp \overline{ب ج}$ ، $ب ج = ٢٨$ سم

أوجد طول $\overline{ء هـ}$



البرهان ∵ $\overline{م ء} \perp \overline{ب ج}$ ∴ ء منتصف $\overline{ب ج}$

∴ $ب ء = ء ج = \frac{٢٨}{٢} = ١٤$ سم

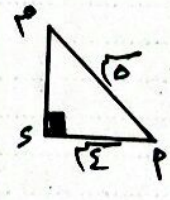
∴ $م ب = م هـ = نق = ٣٥$ سم

فى Δ م ء ب القائم فى ء

من نظرية فيثاغورث

$م ء = \sqrt{٣٥^٢ - ١٤^٢} = \sqrt{٩٧٥} = ٣٣$ سم

∴ $ء هـ = ٣٥ - ٣٣ = ٢$ سم #



أكتب البرهان بأسلوبك الخاص ولكن أكتبه بالتفصيل وأكتب السبب ولا تختصر

مثال ٢ فى الشكل المقابل

$ق(\hat{ب}) = ٤٣^\circ$ ، $\overline{س ص}$ منتصف $\overline{ب ا}$

$\overline{هـ ص}$ منتصف $\overline{ا ج}$ أوجد

$ق(\hat{س م ص})$ **البرهان**

∵ $\overline{س ص}$ منتصف $\overline{ب ا}$ ∴ $ق(\hat{س}) = ٩٠^\circ$

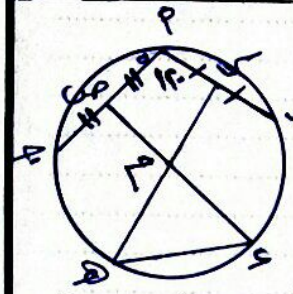
∵ $\overline{هـ ص}$ منتصف $\overline{ا ج}$ ∴ $ق(\hat{ص}) = ٩٠^\circ$

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى $= ٣٦٠^\circ$

∴ $ق(\hat{س م ص}) = ٣٦٠^\circ - (٩٠^\circ + ٩٠^\circ + ٤٣^\circ)$

$= ٣٦٠^\circ - ٢٢٣^\circ = ١٣٧^\circ$ #

مثال ٣ دائرة مركزها م



$ق(\hat{ب}) = ١٢٠^\circ$ ، $\overline{س ص}$ منتصف $\overline{ب ا}$

$\overline{هـ ص}$ منتصف $\overline{ا ج}$ اثبت أن

Δ م ء هـ متساوى الأضلاع

البرهان ∵ $\overline{س ص}$ منتصف $\overline{ب ا}$ ∴ $ق(\hat{س}) = ٩٠^\circ$

∵ $\overline{هـ ص}$ منتصف $\overline{ا ج}$ ∴ $ق(\hat{ص}) = ٩٠^\circ$

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى $= ٣٦٠^\circ$

∴ $ق(\hat{س م ص}) = ٣٦٠^\circ - (٩٠ + ٩٠ + ١٢٠) = ٦٠^\circ$

∴ $ق(\hat{ء م هـ}) = ق(\hat{س م ص}) = ٦٠^\circ$ بالتقابل بالرأس

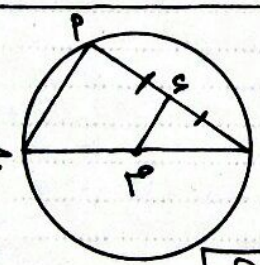
∵ $م ء = م هـ = نق$

∴ $ق(\hat{ء}) = ق(\hat{هـ}) = \frac{١٨٠ - ٦٠}{٢} = ٦٠^\circ$

∴ $ق(\hat{ء}) = ق(\hat{هـ}) = ق(\hat{ء م هـ}) = ٦٠^\circ$

∴ Δ م ء هـ متساوى الأضلاع

مثال ٤ فى الشكل المقابل



دائرة مركزها م ، $\overline{ء م}$ منتصف $\overline{ب ا}$

① اثبت أن $\overline{ء م} \parallel \overline{ا ج}$

② اوجد $ق(\hat{ا})$ **البرهان**

∵ ء منتصف $\overline{ب ا}$ ، ∴ م منتصف $\overline{ب ج}$

∴ $\overline{ء م} \parallel \overline{ا ج}$ ، $ء م = \frac{١}{٢} ا ج$ نظرية ① #

∵ ء منتصف $\overline{ب ا}$ ∴ $ق(\hat{ء}) = ٩٠^\circ$

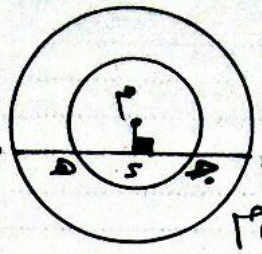
∴ $ق(\hat{ا}) = ق(\hat{ء}) = ٩٠^\circ$ بالتناظر (حرف F)

© #

مثال ٥ في الشكل المقابل

م ء ⊥ أ ب ؛ إثبات أن

أ جـ = هـ ب



البرهان في الدائرة الصغرى م

∵ م ء ⊥ جـ هـ ∴ ء منتصف جـ هـ

∴ جـ ء = ء هـ ← ①

في الدائرة الكبرى م

∵ م ء ⊥ أ ب ∴ ء منتصف أ ب

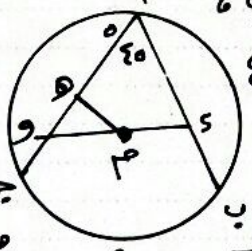
∴ أ ء = ء ب ← ②

بطرح ① من ② ينتج أن

أ جـ = هـ ب #

مثال ٦ ء ، هـ منتصفا أ ب ، أ جـ على الترتيب ، ق(أ̂) = ق(ب̂)

إثبات أن Δ م هـ و متساوي الساقين



البرهان ∵ ء منتصف أ ب ∴ ق(ء̂) = ٩٠°

∵ هـ منتصف أ جـ ∴ ق(هـ̂) = ٩٠°

∴ ق(ء م̂ هـ) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٤٥°)

= ١٣٥°

∴ ق(هـ م̂ و) المكملة = ١٨٠° − ١٣٥° = ٤٥°

في Δ م هـ و القائم في هـ

ق(و̂) = ١٨٠° − (٤٥° + ٩٠°) = ٤٥°

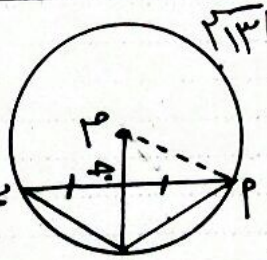
∴ ق(م̂) = ق(و̂) = ٤٥°

∴ Δ م هـ و متساوي الساقين

مثال ٧ دائرة م طول قطرها ٢٦ سم

أ ب = ٢٤ سم ، جـ منتصف أ ب

أوجد محيط Δ م أ ب



الحل نرسم م ء ⊥ أ ب

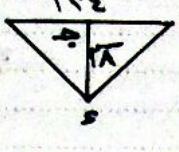
البرهان ∵ جـ منتصف أ ب ∴ ق(جـ̂) = ٩٠°

∴ أ جـ = جـ ب = ١٢ سم

في Δ م جـ أ القائم في جـ

م جـ = √(م أ)² − (أ جـ)² = √(١٣)² − (١٢)² = √٢٥

∵ م ء = نق = ١٣ سم ∴ جـ ء = ١٣ − ٥ = ٨ سم



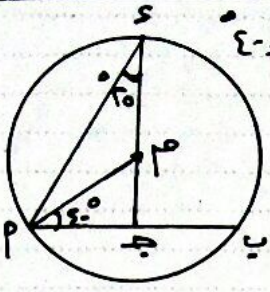
في Δ أ ب ء

مساحة Δ = ½ طول القاعدة × الارتفاع

= ½ × ٢٤ × ٨ = ٩٦ سم²

مثال ٨ ق(ء̂) = ٢٥° ، ق(م أ̂ جـ) = ٤٠°

برهن أن جـ منتصف أ ب



البرهان في Δ م ء أ

∵ م ء = م أ = نق

∴ ق(ء̂) = ق(م أ̂ ء) = ٢٥°

∴ ق(جـ أ̂ ء) = ٤٠° + ٢٥° = ٦٥°

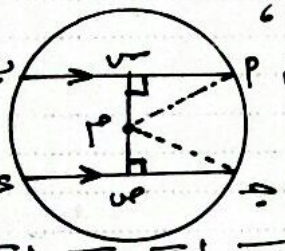
في Δ ء جـ أ ∵ مجموع قياسات زوايا Δ = ١٨٠°

∴ ق(جـ̂) = ١٨٠° − (٦٥° + ٢٥°) = ٩٠°

∴ م جـ ⊥ أ ب ∴ جـ منتصف أ ب #

مثال ٩ أ ب // جـ ء ، أ ب = ٢٤ سم ، جـ ء = ٢٦ سم

أوجد البعد بين الوترين أ ب ، جـ ء إذا كان طول نصف قطر الدائرة م = ١٣ سم



الحل نرسم س ص حيث س ص ⊥ أ ب ، س ص ⊥ جـ ء

∵ م س ⊥ أ ب ∴ س منتصف أ ب ∴ أ س = ١٢ سم

∵ م ص ⊥ جـ ء ∴ ص منتصف جـ ء ∴ جـ ص = ٥ سم

في Δ أ م س القائم في س

من نظرية فيثاغورث

م س = √(١٣² − ١٢²) = √(١٦٩ − ١٤٤) = √٢٥ = ٥ سم

في Δ م جـ ص القائم في ص

من نظرية فيثاغورث

م ص = √(١٣² − ٥²) = √(١٦٩ − ٢٥) = √١٤٤ = ١٢ سم

∴ س ص = م ص + م س = ١٢ + ٥ = ١٧ سم

#

ربي اشرح لي صدري ويسر لي أمري

اللهم لا سهل إلا ما جعلته سهلاً

الدرس الثانى

موضع نقطه ومستقيم بالنسبه لدائرة

* موضع نقطه بالنسبة لدائرة

١ P خارج الدائرة م

يكون $م P > نق$

٢ P على الدائرة م

يكون $م P = نق$

٣ P داخل الدائرة م

يكون $م P < نق$

* موضع مستقيم بالنسبة لدائرة :-

١ خارج الدائرة م

$م P > نق$

$ل \cap$ الدائرة $م = \phi$

٢ مماس للدائرة م

$م P = نق$

$ل \cap$ الدائرة $م = \{P\}$

٣ قاطع للدائرة م

$م P < نق$

$ل \cap$ الدائرة $م = \{ء، جـ\}$

نتيجة ①

(المماس للدائرة يكون عمودياً على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس)

∵ ل مماس للدائرة عند P ، $\overline{م P}$ نصف قطر

نتج ∴ $ق(\hat{P}) = ٩٠°$

المستقيم العمودى على قطر الدائرة من إحدى نهايتيه يكون مماساً للدائرة

نتيجة ②

(المماسان للدائرة المرسومان من نهايتى قطر فيها يكونان متوازيان)

أى أن $\overleftrightarrow{ل_١} // \overleftrightarrow{ل_٢}$

مثال ①

فى الشكل المقابل

$\overleftarrow{P ب}$ مماس للدائرة م عند ب ،

ء منتصف $\overline{س ص}$ ، $ق(\hat{ء م ب}) = ١٣٠°$

أوجد $ق(\hat{P})$

البرهان ∵ ء منتصف $\overline{س ص}$

∴ $ق(\hat{ء}) = ٩٠°$

∵ $\overleftarrow{P ب}$ مماس ، $\overline{م ب}$ نصف قطر ∴ $ق(\hat{ب}) = ٩٠°$

∴ $ق(\hat{P}) = ٣٦٠° - (١٣٠° + ٩٠° + ٩٠°) = ٥٠°$ #

مثال ②

فى الشكل المقابل $\overleftrightarrow{س ص}$ مماس للدائرة عند ص ، ع ∈ $\overline{م س}$ ، $م ص = ٢٨$ ، $س ص = ٢١$ أحسب طول نصف قطر الدائرة م

البرهان ∵ $\overleftrightarrow{س ص}$ مماس ∴ $ق(\hat{ص}) = ٩٠°$

فى Δ س ص م القائم فى ص

باستخدام نظرية فيثاغورث

$(س م)^٢ = (س ص)^٢ + (ص م)^٢$

$(٨ + نق)^٢ = (١٢)^٢ + (نق)^٢$

$٦٤ + نق^٢ + ١٦ نق = ١٤٤ + نق^٢$

$١٦ نق = ١٤٤ - ٦٤$

$\frac{١٦ نق}{١٦} = \frac{٨٠}{١٦}$

∴ $نق = ٥ سم$

∴ طول نصف قطر الدائرة $= ٥ سم$

مثال ③

ء منتصف $\overline{س ص}$

$ق(\hat{P}) = ٦٠°$ ، $ق(\hat{ء}) = ١٢٠°$

إثبت أن $\overleftarrow{P ب}$ مماس للدائرة م عند نقطة ب

البرهان ∵ ء منتصف $\overset{\frown}{أ ب}$ ∴ ق(ء̂) = 90°

∴ ق(ب̂) = 360° − (60° + 120° + 90°)

= 90° = زاوية قائمة

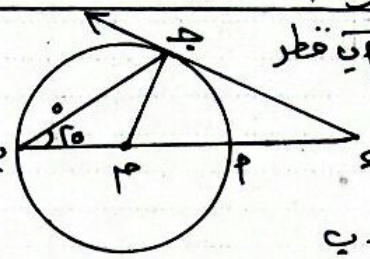
∴ $\overleftarrow{أ ب} \perp \overline{ب م}$ عند ب

∴ $\overleftarrow{أ ب}$ مماس للدائرة م عند ب

مثال ٤ ء جـ مماس، أ ب قطر

ق(ب̂) = 20° أوجد

ق(ء̂)



البرهان في Δ م جـ ب

∵ م جـ = م ب = نق

∴ ق(م جـ̂ ب) = ق(ب̂) = 20°

∵ ء جـ مماس، $\overline{م جـ}$ نصف قطر

∴ ق(ء جـ̂ م) = 90°

∴ ق(ء جـ̂ ب) = 90° + 20° = 110°

في Δ ء جـ ب

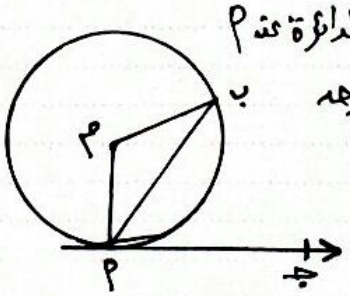
ق(ء̂) = 180° − (110° + 20°) = 180° − 140°

= 40° #

مثال ٥ م جـ مماس للدائرة عند م

ق(م ب̂ م) = 40° أوجد

ق(ب م̂ جـ)



البرهان

في Δ م ب م

∵ م ب = م م = نق

∴ ق(ب م̂ م) = ق(م ب̂ م) = 40°

∵ م جـ مماس، $\overline{م م}$ نصف قطر

∴ ق(جـ م̂ م) = 90°

∴ ق(ب م̂ جـ) = 90° − 40° = 50°

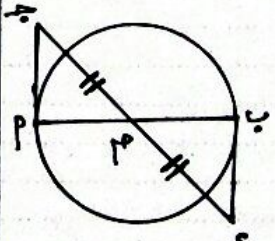
مثال ٦ في الشكل المقابل

م جـ مماس للدائرة عند م

جـ م = م ء اثبت أن

ب ء مماس للدائرة م عند ب

البرهان ∵ م جـ مماس، م م نصف قطر



∴ ق(م̂) = 90°

Δ م ب ء، Δ م م جـ فيهما

م ء = م جـ معطى

م ب = م م = نق

ق(ء م̂ ب) = ق(جـ م̂ م) بالتقابل بالرأس

∴ Δ ء ب م ≡ Δ جـ م م وينتج أن

ق(م̂) = ق(ب̂) = 90°

∴ ب ء ⊥ م ب ∴ ب ء مماس

للدائرة م عند ب

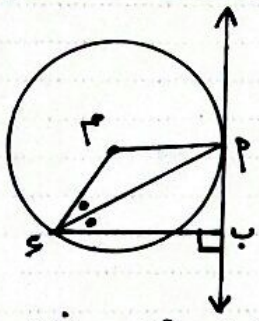
مثال ٧ في الشكل المقابل

ق(م أ̂ م) = ق(م ء̂ م)

ء ب ⊥ $\overleftarrow{أ ب}$ اثبت أن

$\overleftarrow{أ ب}$ مماس للدائرة م

عند م



البرهان في Δ م أ ء ∵ م أ = م ء = نق

∴ ق(م أ̂ ء) = ق(م ء̂ أ) ← (1)

∴ ق(م ء̂ أ) = ق(م ء̂ ب) ← معطى (2)

من (1)، (2) ينتج أن

ق(م أ̂ ء) = ق(م ء̂ ب) وهما في

وضع تبادل

∴ $\overline{أ م} \parallel \overline{ب ء}$

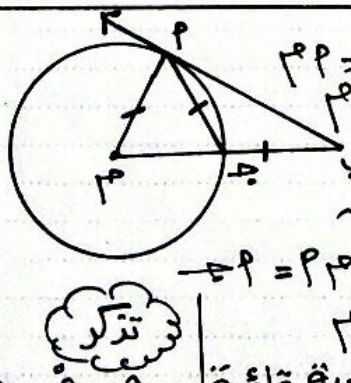
∴ ق(ب أ̂ م) = ق(ب̂) = 90° بالتناظر

∴ $\overleftarrow{أ ب} \perp \overline{أ م}$ من عند م

∴ $\overleftarrow{أ ب}$ مماس للدائرة م عند م

مثال ٨ ب جـ = جـ م = م م

اثبت أن ب م مماس للدائرة م



البرهان ∵ م م = م جـ = نق

∴ ب جـ = جـ م = م م = م جـ

∴ م جـ = $\frac{1}{2}$ ب م

∴ $\overline{م جـ}$ خارج من زاوية قائمة

∴ ق(م̂) قائمة ∴ ب م ⊥ $\overline{أ م}$

∴ ب م مماس للدائرة م عند م

#

تذكر

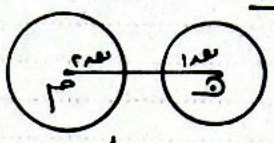
ق(ب̂) = 90°

ء ب = $\frac{1}{2}$ أ جـ

المتوسط الخارج من الزاوية القائمة = $\frac{1}{2}$ طول الوتر

الدرس الثالث
موضع دائرة بالنسبة لدائرة

١ الدائرتان المتباعدتان :-

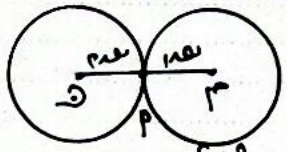


م ق > نق١ - نق٢

الدائرة م١ الدائرة ق = ∅

سطح الدائرة م١ سطح الدائرة ق = ∅

٢ الدائرتان المتماستان من الخارج:

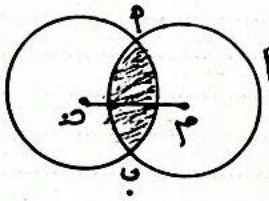


م ق = نق١ + نق٢

الدائرة م١ الدائرة ق = {أ}

سطح الدائرة م١ سطح الدائرة ق = {أ}

٣ متقاطعتان :



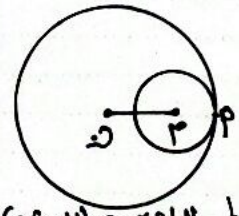
نق١ - نق٢ < م ق < نق١ + نق٢

الدائرة م١ الدائرة ق = {أ ، ب}

سطح الدائرة م١ سطح الدائرة ق = المنطقة المظللة

← أى دائرتين تتقاطعان فى نقطتين على الأكثر

٤ متماستان من الداخل:

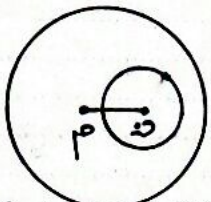


م ق = نق١ - نق٢

الدائرة م١ الدائرة ق = {أ}

سطح الدائرة م١ سطح الدائرة ق = سطح الدائرة م٢ (الصغرى)

٥ متداخلتان

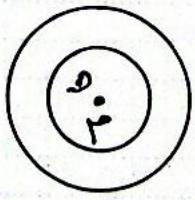


م ق < نق١ - نق٢

الدائرة م١ الدائرة ق = ∅

سطح الدائرة م١ سطح الدائرة ق = سطح الدائرة ق (الصغرى)

٦ متحدتان فى المركز



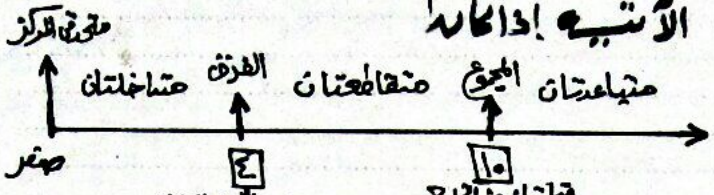
م ق = صفر

الدائرة م١ الدائرة ق = ∅

سطح الدائرة م١ سطح الدائرة ق = الدائرة الصغرى ق (الصغرى)

م ، ق دائرتان نصف قطر كلٍّ منهم ٢٧ ، ٢٣

أوجد وضع كلٍّ منهم بالنسبة للأخرى فى الحالات الآتية إذا كانت



م ق = ٢٢ (متباعدتان)

م ق = ٥٠ (متماستان من الخارج)

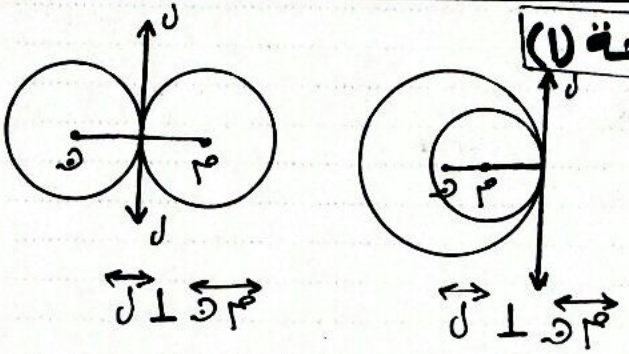
م ق = ٢٨ (متقاطعتان)

م ق = ٤ (متماستان من الداخل)

م ق = ٣٤ (متداخلتان)

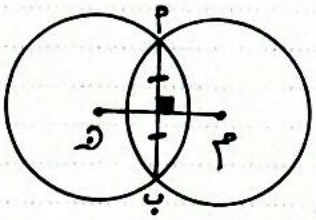
م ق = صفر (متحدتان المركز)

نتيجة (١)



«خط المركزين لدائرتين متماستين يمر بنقطة التماس ويكون عموديًا على المماس المشترك عند نقطة التماس»

نتيجة (٢)



م ق خط مركزين

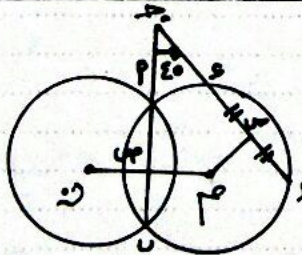
أ ب مماس مشترك

∴ م ق ⊥ أ ب

وينصفه

«خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًا على الوتر المشترك وينصفه»

مثال (١)



س منتصف ع ص ، ق (ع أ) = ٤٠° أوجد ق (س م ص)

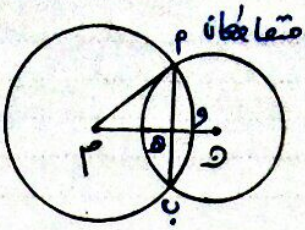
البرهان ∵ س منتصف ع ص

∴ ق (س ع) = ٩٠°

∵ م ق خط مركزين ، أ ب وتر مشترك ∴ ق (ع) = ٩٠°

∴ ق (س م ص) = ٣٦٠ - (٤٠ + ٩٠ + ٩٠) = ١٢٠° #

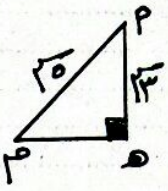
مثال ٢ م، ق دائرتان متقاطعتان م



أ ب = ٢٤، م م = ٣٥،
م ق = ٢٧ أوجد طول
م هـ، هـ و

البرهان ∵ م ق خط مركزين، أ ب وتر مشترك

∴ م ق ⊥ أ ب وينصفه



∴ أ هـ = هـ ب = ٢٤/٢ = ١٢

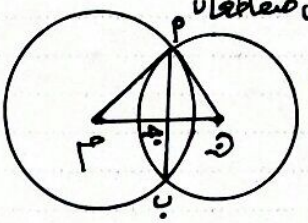
فى Δ أ هـ م القائم فى هـ

م هـ = √(٢٥ − ٩) = √١٦ = ٤

∴ هـ م = ٥ − ٤ = ١ #

حيث م أ = م و = ٥

مثال ٣ م، ق دائرتان متقاطعتان



فى أ، ب م أ = ٦،
ق أ = ٨، م ق = ١٠
فأوجد طول أ ب

البرهان فى Δ ق أ م

(ق م)² = (١٠)² = ١٠٠

(ق أ)² + (أ م)² = (٨)² + (٦)² = ٦٤ + ٣٦ = ١٠٠

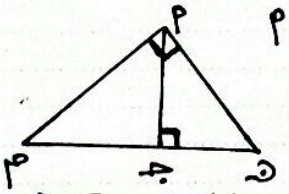
∴ (ق م)² = (ق أ)² + (أ م)² (يحقق فيثاغورث)

∴ Δ ق أ م قائم فى أ

∵ م ق خط مركزين، أ ب وتر مشترك

∴ م ق ⊥ أ ب، أ جـ = جـ ب

فى Δ ق أ م القائم فى أ



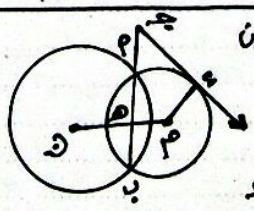
∴ أ جـ ⊥ ق م

من نظرية إقليدس

أ جـ = (ق أ × أ م) / ق م = (٨ × ٦)/١٠ = ٤٨/١٠ = ٤٫٨

∴ أ ب = ٢ × أ جـ = ٢ × ٤٫٨ = ٩٫٦ #

مثال ٤ م، ق دائرتان متقاطعتان



فى أ، ب ق(∠ أ هـ م) = ١٢٠°
ق(∠ جـ) = ٥٥° إثبت أن
جـ د مماس للدائرة م عند د

البرهان ∵ م ق خط مركزين، أ ب وتر مشترك

∴ ق(∠ هـ) = ٩٠°

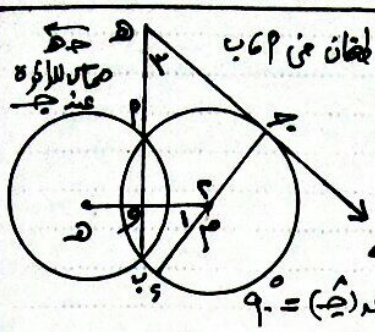
∴ ق(∠ د) = ٣٦٠° − (١٢٠° + ٥٥° + ٩٠°)

= ٣٦٠° − ٢٧٠° = ٩٠°

∴ د جـ ⊥ د م

∴ د جـ مماس للدائرة م عند د

مثال ٥ م، ق دائرتان متقاطعتان فى أ، ب



جـ هـ قطر إثبت أن
ق(∠ ء م ق) = ق(∠ جـ هـ ب)

البرهان ∵ جـ هـ مماس،
م جـ نصف قطر ∴ ق(∠ جـ) = ٩٠°

∵ م ق خط المركزين، أ ب وتر مشترك

∴ ق(∠ ق) = ٩٠°

∴ ق(∠ جـ) + ق(∠ ق) = ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠°

فى الشكل الرباعى هـ جـ م و

ق(∠ ٣) + ق(∠ ٢) = ٣٦٠ − ١٨٠ = ١٨٠°

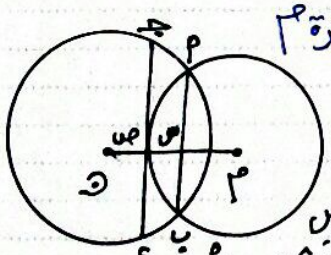
∴ ق(∠ ٣) + ق(∠ ٢) = ١٨٠° ← ①

ق(∠ ٢) + ق(∠ ١) = ١٨٠ ← ② خط مستقيم

من ①، ② ينتج أن
ق(∠ ٣) = ق(∠ ١)

∴ ق(∠ ء م ق) = ق(∠ جـ هـ ب) #

مثال ٦ جـ د مماس للدائرة م



عند ب إثبت أن
أ ب // جـ د

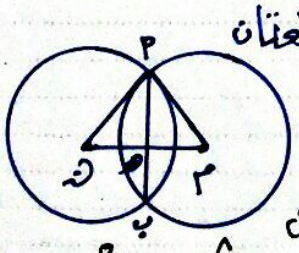
البرهان ∵ م ق خط مركزين
، أ ب وتر مشترك ∴ ق(∠ س) = ٩٠°

∵ جـ د مماس، م ص نصف قطر ∴ ق(∠ ص) = ٩٠°

∴ ق(∠ س) = ق(∠ ص) وهما فى وضع تناظر

∴ أ ب // جـ د

مثال ٧ م، ق دائرتان متقاطعتان



فى أ، ب ومتطابقتان
إثبت أن م هـ = هـ ق

البرهان ∵ م ق خط مركزين
، أ ب وتر مشترك ∴ ق(∠ هـ) = ٩٠°

Δ أ هـ م ≡ Δ أ هـ ق (نثبت تطابقهما)

فيهما { م أ = م ب = نق
م م ضلع مشترك
ق(أ م م) = ق(ب م م) = 90°

∴ Δ أ م م ≡ Δ ب م م وينتج أن

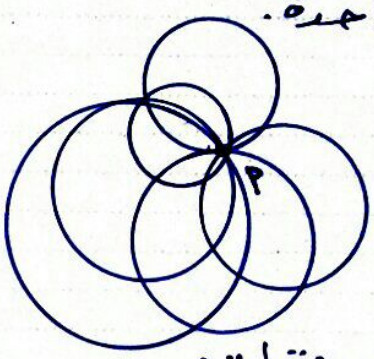
أ م = م ب #

المثلث الحاد الزوايا	المثلث القائم	المثلث المنفرج
		
مركز الدائرة داخل المثلث	مركز الدائرة الخارجة عنه يقع في منتصف الوتر	مركز الدائرة الخارجة عنه تقع خارج المثلث

الدرس الرابع : [تعيين الدائرة]

١ رسم دائرة تمر بنقطة واحدة :

يمكن رسم عدد لانهائي من الدوائر التي تمر بنقطة واحدة.



٢ رسم دائرة تمر بنقطتين

يمكن رسم عدد لانهائي من الدوائر التي تمر بنقطتين

مركز هذه الدوائر يقع على محور تماثل القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين

مركز أ صغر دائرة تمر بالنقطتين

م ، ب هو منتصف أ ب

٣ رسم دائرة تمر بثلاث نقاط

(أ) تقع على استقامة واحدة

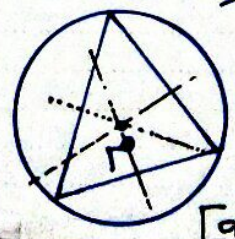
عدد الدوائر التي تمر بثلاث نقاط على استقامة واحدة = صفر

(ب) ليست على استقامة واحدة :-

يمكن رسم دائرة واحدة

مركز الدائرة الخارجة عن المثلث هي نقطة تقاطع محاور تماثل أضلاعه

[أو الأعمدة المقامة من منتصفات أضلاعه]

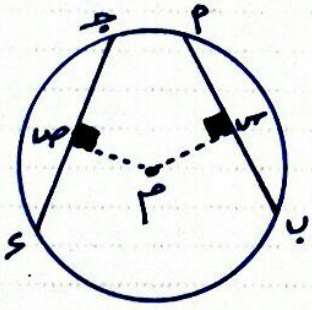


مركز الدائرة الخارجة للمثلث المتساوي الأضلاع هو نقطة تقاطع محاور أضلاعه وهي نفسها نقطة تقاطع متوسطات أضلاعه وهي نفسها نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية وهي نفسها نقطة تقاطع ارتفاعاته.

مثال (١) ارسم أ ب طولها ٦ سم ثم ارسم الدائرة المارة بالنقطتين م ، ب والتي نصف قطرها ٤ سم (كم عدد الحلول الممكنة)

مثال (٢) ارسم Δ أ ب ج حيث أ ب = ٥ سم ، ب ج = ٦ سم ، أ ج = ٧ سم ثم ارسم الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب ج

الدرس الخامس :-
[علاقة أوتار الدائرة بمركزها]



نظرية

[الأوتار المتساوية في الطول في دائرة تكون على أبعاد متساوية من مركزها]

عكس النظرية

[في الدائرة الواحدة أو في الدوائر المتطابقة إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من المركز فإنها تكون متساوية في الطول]

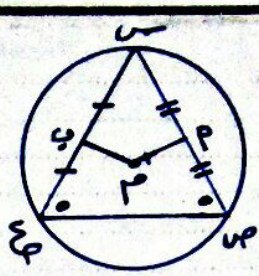
∵ أ ب = ج ء ، و ن = و ن

∴ م هـ = م و ، بعد = بعد

والعكس ∵ م هـ = م و ، بعد = بعد

∴ أ ب = ج ء ، و ن = و ن

مثال ١ أ منتصف $\overline{سص}$ ، ب منتصف $\overline{سع}$ ، $ق(\hat{ص}) = ق(\hat{ع})$ إثبت أن $أ = أب$



البرهان ∵ أ منتصف $\overline{سص}$ ∴ $ق(\hat{أ}) = 90°$

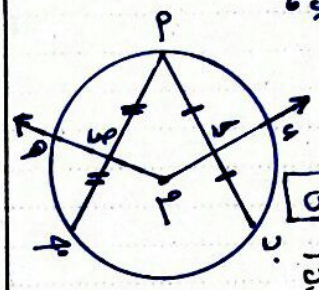
∵ ب منتصف $\overline{سع}$ ∴ $ق(\hat{ب}) = 90°$

∵ $ق(\hat{ص}) = ق(\hat{ع})$ ∴ Δ سصع متساوي الساقين ∴ $سص = سع$ وتر = وتر

∴ $أم = ب م$ بعد = بعد #

مثال ٢ $\overline{سص}$ منتصف $\overline{أب}$ ، $\overline{صع}$ منتصف $\overline{أجـ}$

إثبت أن $س ع = ب جـ$



البرهان ∵ س منتصف $\overline{أب}$ ∴ $ق(\hat{س}) = 90°$ ، ∵ ص منتصف $\overline{أجـ}$

∴ $ق(\hat{ص}) = 90°$

∵ $أ = أب$ وتر = وتر ∴ $م س = م ص$ ① بعد = بعد

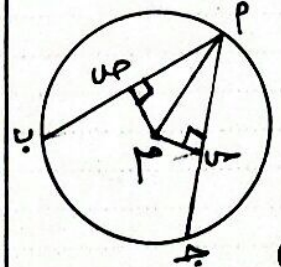
∵ $م ع = م هـ$ = نق ②

بطرح ① من ② ينتج أن $ع س = هـ ص$ #

مثال ٣ $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ وتران متساويان في الطول

$\overline{م س} \perp \overline{أجـ}$ ، $\overline{م ص} \perp \overline{أب}$

إثبت أن $ق(\hat{س م ص}) = ق(\hat{ص أ س})$



البرهان ∵ $م س \perp أجـ$ ∴ س منتصف $\overline{أجـ}$

∵ $م ص \perp أب$ ∴ ص منتصف $\overline{أب}$

∵ $أب = أجـ$ معطى ∴ $\frac{1}{2} أب = \frac{1}{2} أجـ$

∴ $أس = أص$

∴ $أب = أجـ$ وتر = وتر

∴ $م س = م ص$ بعد = بعد

في Δ أ م س ، Δ أ م ص

$أم = أم$ ضلع مشترك

فيهما $م س = م ص$ بعد = بعد

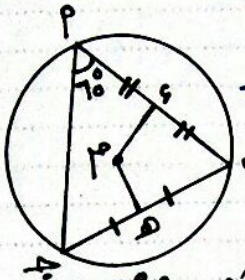
$\overline{م أ}$ ضلع مشترك

∴ Δ أ م س $\equiv \Delta$ أ م ص وينتج من التطابق أن

$ق(\hat{س أ م}) = ق(\hat{ص أ م})$ #

مثال ٤ $ق(\hat{أ}) = 70°$ ، ء ، هـ منتصفا $\overline{أب}$ ، $\overline{بجـ}$ ، $م ء = م هـ$

أوجد $ق(\hat{ب})$



البرهان ∵ ء منتصف $\overline{أب}$ ∴ $ق(\hat{ء}) = 90°$

∵ هـ منتصف $\overline{بجـ}$ ∴ $ق(\hat{هـ}) = 90°$

∵ $م ء = م هـ$ معطى بعد = بعد

∴ $أب = بجـ$ وتر = وتر

∴ Δ أ ب جـ متساوي الساقين

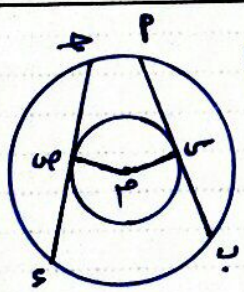
∴ $ق(\hat{أ}) = ق(\hat{جـ}) = 70°$

∴ $ق(\hat{ب}) = 180 - (70° + 70°)$

$= 180° - 140° = 40°$ #

مثال ٥ دائرتان متحدتا المركز م

إثبت أن $أب = جـ ء$



البرهان في الدائرة الصغرى م

$م س = م ص$ = نق

في الدائرة الكبرى م

∵ $\overline{أب}$ مماس ∴ $\overline{م س} \perp \overline{أب}$

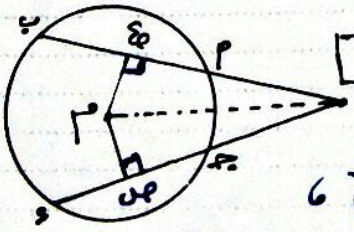
∵ $\overline{جـ ء}$ مماس ∴ $\overline{م ص} \perp \overline{جـ ء}$

∴ $م أ = م ب$ بعد = بعد

∴ $أب = جـ ء$ وتر = وتر #

مثال ٦ $أب = جـ ء$

إثبت أن $س أ = س جـ$



البرهان نرسم $\overline{م هـ} \perp \overline{أب}$ ، $\overline{م ص} \perp \overline{جـ ء}$

نرسم $\overline{م س}$ ، نصل $\overline{س م}$

∵ $أب = جـ ء$ وتر = وتر ∴ $م هـ = م ص$ بعد = بعد

Δ س هـ م ، Δ س ص م فيهما

فيهما { م ق = م ص بعد = بعد
س م ضلع مشترك
ق(ق) = ق(م ص) = ٩٠° }

∴ Δ س م ق ≡ Δ س م ص نتيجة

∴ س ق = س ص ← ①

∵ أ ب = ج د ∴ ½ أ ب = ½ ج د

∴ أ ق = ح ص ← ②

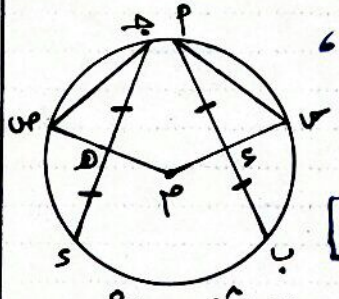
بطرح ② من ① ينتج

س أ = س ح #

مثال ٧

ء منتصف أ ب ،
هـ منتصف ج د ،
أ ب = ج د

إثبات أن س أ = ج ص



البرهان

∵ ء منتصف أ ب ∴ ق(ق) = ٩٠°

∵ هـ منتصف ج د ∴ ق(هـ) = ٩٠°

∵ أ ب = ج د وتر = وتر

∴ م ء = م هـ بعد = بعد ← ①

∴ م س = م ص = نق ← ②

بطرح ② من ① ينتج أن

س ء = ص هـ

∵ أ ب = ج د ∴ ½ أ ب = ½ ج د

∴ أ ء = ج هـ

Δ أ ء س ، Δ ج هـ ص

فيهما { أ ء = ج هـ
س ء = ص هـ
ق(ء) = ق(هـ) = ٩٠° }

∴ Δ أ ء س ≡ Δ ج هـ ص

وينتج أن س أ = ص ج #

مثال ٨

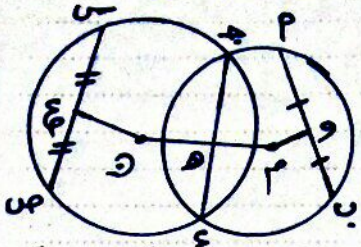
م ، ن دائرتان متقاطعتان في ج ، د

و منتصف أ ب ،

ع منتصف س ص ،

و م = م هـ ، ع ق = ق هـ

إثبات أن أ ب = س ص



البرهان

∵ و منتصف أ ب ∴ ق(ق) = ٩٠°

∵ ع منتصف س ص ∴ ق(ع) = ٩٠°

∵ م و = م هـ بعد = بعد

∴ أ ب = ج د وتر = وتر ← ①

∵ ق هـ = ق ع بعد = بعد

∴ ج د = س ص وتر = وتر ← ②

من ① ، ② ينتج أن

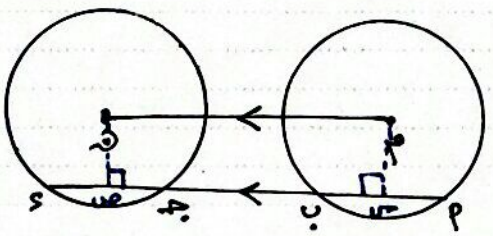
أ ب = س ص #

مثال ٩

م ، ن دائرتان متطابقتان

م ق // ↔ ج د

إثبات أن أ ج = ب د



البرهان

العمل نرسم م س ⊥ أ ب ، ق ص ⊥ ج د

∵ م ق // ↔ أ د ∴ م س ص ق مستطيل

∴ م س = ق ص بعد = بعد

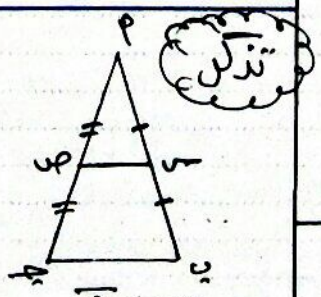
∴ أ ب = ج د وتر = وتر

بإضافة ب ج للطرفين

أ ب + ب ج = د ج + ب ج

∴ أ ج = د ب #

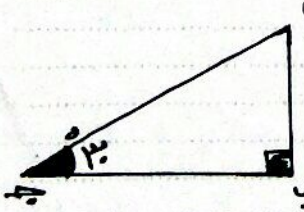
تذكر



س منتصف أ ب

ص منتصف أ ج

∴ س ص = ½ ب ج



∵ ق(ب) = ٩٠° ، ق(أ) = ٣٠°

∴ ب أ = ½ أ ج

(ضلع المقابل للزاوية ٣٠° يساوي ½ طول الوتر)

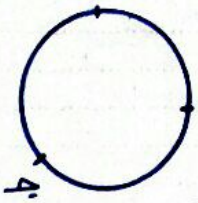


(Maths is Great Subject)

الوحدة الخامسة

١ [الزوايا والأقواس]

القوس: هو جزء من الدائرة محدد بنقطتين على الدائرة ويرمز له بالرمز



$\overset{\frown}{أب}$ أو $\overset{\frown}{بجـ}$ أو $\overset{\frown}{أجـ}$ أو

$\overset{\frown}{أبجـ}$ أو $\overset{\frown}{بجـأ}$ أو $\overset{\frown}{بأجـ}$

قياس الدائرة = ٣٦٠°

قياس أى جزء فى الدائرة = الجزء × ٣٦٠°

مثال: قياس نصف الدائرة

$= \frac{1}{2} \times 360° = 180°$

قياس $\frac{1}{3}$ دائرة

$= \frac{1}{3} \times 360° = 120°$

قياس $\frac{1}{4}$ دائرة

$= \frac{1}{4} \times 360° = 90°$

محيط الدائرة = ٢ ط نق

محيط أى جزء من الدائرة = الجزء × ٢ ط نق

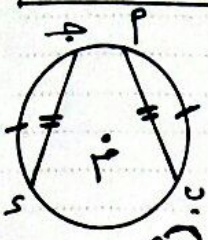
مثال: نصف محيط الدائرة

$= \frac{1}{2} \times 2 ط نق = ط نق = 3 نق$

$\frac{1}{4}$ محيط الدائرة

$= \frac{1}{4} \times 2 ط نق = \frac{ط نق}{2} = \frac{1}{2} ط نق$

٢ الوتران المتساويان يحصران قوسان متساويان فى القياس



∵ $أب = جـد$

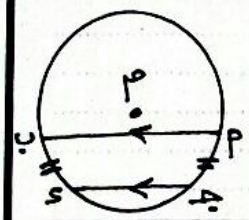
فإن ق $(\overset{\frown}{أب}) = ق(\overset{\frown}{جـد})$

والعكس إذا كان ق$(\overset{\frown}{أب}) = ق(\overset{\frown}{جـد})$

∴ $أب = جـد$ قوس = قوس

∴ وتر = وتر (والعكس)

٣ الوتران المتوازيان فى الدائرة يحصران قوسين متساويين فى القياس.

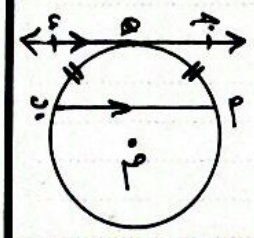


∵ $\overline{أب} // \overline{جـد}$

∴ ق$(\overset{\frown}{أجـ}) = ق(\overset{\frown}{بد})$

والعكس صحيح

٤ القوسان المحصوران بين وتر مماس يوازيه فى الدائرة متساويان فى القياس



∵ $\overleftrightarrow{هـد}$ مماس، $\overline{أب}$ وتر

∵ $\overleftrightarrow{هـد} // \overline{أب}$

∴ ق$(\overset{\frown}{أهـ}) = ق(\overset{\frown}{هـب})$

العلاقة بين طول القوس وقياس القوس :-

$$\text{طول القوس} = \frac{\text{قياس القوس}}{360°} \times 2 ط نق$$

حيث نق هو نصف القطر، ط $= \frac{22}{7}$

مثال ① أوجد قياس القوس الذى يمثل $\frac{1}{3}$ قياس الدائرة وإذا كان نصف قطر الدائرة ١٥ سم فأوجد طول هذا القوس (ط = ٣٫١٤) الحل

قياس القوس $= \frac{1}{3} \times 360° = 120°$

طول القوس $= \frac{\text{قياس القوس}}{360°} \times 2 ط نق$

$= \frac{120}{360} \times 2 \times 3{,}14 \times 15 = 31{,}4$ سم #

نتائج هامة :-

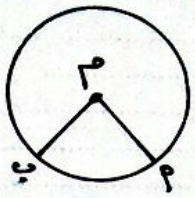
← فى الدائرة الواحدة أو فى الدوائر المتطابقة

١ الأقواس المتساوية فى الطول تكون متساوية فى القياس والعكس صحيح

∴ ق$(\overset{\frown}{أب}) = ق(\overset{\frown}{جـد})$

∴ طول $\overset{\frown}{أب}$ = طول $\overset{\frown}{جـد}$

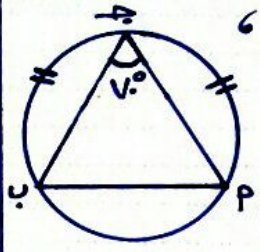
* الزاوية المركزية :-



هى زاوية رأسها مركز الدائرة وضلعاها أنصاف أقطار فى الدائرة
∠ م ء ب زاوية مركزية

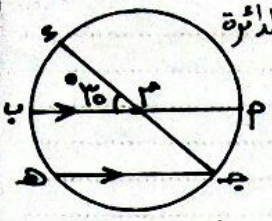
* قياس القوس : يساوى قياس الزاوية المركزية المقابلة لهذا القوس
أى أن ق(م̂) = ق(ء ب)

مثال ① ق(ء ب) = ق(ب جـ) ،
ق(ء م̂ ب) = ٧٠°
أوجد ق(ء م̂ جـ)



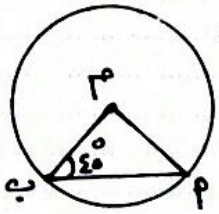
البرهان ∵ ق(ء ب) = ق(ب جـ)
قوس = قوس
∴ ء جـ = ب جـ وتر = وتر
∴ Δ ء جـ ب متساوى الساقين
∴ ق(ء ب̂ جـ) = ق(ب ء̂ جـ) = (١٨٠ − ٧٠) / ٢
= ٥٥° #

مثال ② ء ب ، جـ د قطران فى الدائرة م بحيث ق(ء م̂ ب) = ٣٠° ،
جـ هـ // ء ب أوجد ق(ب هـ)



البرهان ∵ ق(ء م̂ ب) = ق(ء ب) = ٣٠°
بالتقابل بالرأس
∵ ء ب // جـ هـ وتر // وتر
∴ ق(ء جـ) = ق(ب هـ) قوس = قوس
∵ ق(ء جـ) = ق(ء م̂ جـ) = ٣٠°
∴ ق(ب هـ) = ٣٠° #

مثال ③ ق(م ب̂ ء) = ٤٥° ،
م ء = ٧ سم أوجد طول ء ب (٢٢/٧ = ٣١)

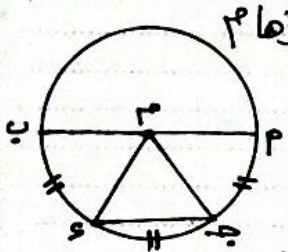


البرهان فى Δ م ء ب
∵ م ء = م ب = نق ∴ Δ م ء ب متساوى الساقين
∴ ق(ء̂) = ق(ب̂) = ٤٥°
∴ ق(ء م̂ ب) = ١٨٠° − (٤٥° + ٤٥°) = ٩٠°
∴ ق(ء ب) = ق(ء م̂ ب) = ٩٠°
∴ طول ء ب = (ق(ء ب) / ٣٦٠°) × ٢ × ٢٢/٧ × نق
= (٩٠° / ٣٦٠°) × ٢٢ × ٧/٧ × ٧
= ١١ سم #

مثال ④ ء ب ، جـ د قطران فى الدائرة م بحيث ق(ء م̂ ب) = ٣٠° ،
جـ هـ // ء ب أوجد ق(ب هـ)

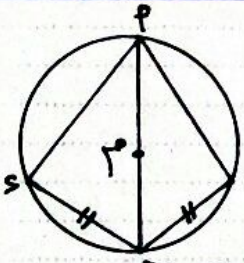
البرهان ∵ ق(ء م̂ ب) = ق(ء ب) = ٣٠°
بالتقابل بالرأس
∵ ء ب // جـ هـ وتر // وتر
∴ ق(ء جـ) = ق(ب هـ) قوس = قوس
∵ ق(ء جـ) = ق(ء م̂ جـ) = ٣٠°
∴ ق(ب هـ) = ٣٠° #

مثال ⑤ ء ب قطر فى الدائرة التى مركزها م
ق(ء جـ) = ق(جـ د) = ق(د ب)
اثبت أن Δ م جـ د متساوى الأضلاع



البرهان ∵ ء ب قطر فى الدائرة م
∴ ق(ء جـ ب) = ١٨٠°
∴ ق(ء جـ) = ق(جـ د) = ق(د ب) = ١٨٠/٣ = ٦٠°
∴ ق(جـ م̂ د) = ٦٠° المركزية
فى Δ م جـ د ∵ م جـ = م د
∴ ق(جـ̂) = ق(د̂) = (١٨٠ − ٦٠)/٢ = ٦٠°
∴ ق(جـ̂) = ق(د̂) = ق(جـ م̂ د) = ٦٠°
∴ Δ م جـ د متساوى الأضلاع

مثال ⑥ ء ب جـ د شكل رباعى ،
ء جـ قطر فى الدائرة ، جـ ب = جـ د
اثبت أن ق(ء ب) = ق(ء د)



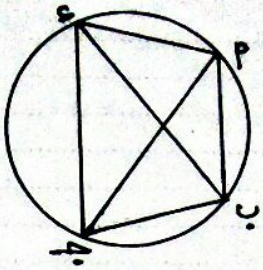
البرهان ∵ ء جـ قطر فى الدائرة م
∴ ق(ء ب جـ) = ق(ء د جـ) ← ①
∵ ب جـ = جـ د وتر = وتر
∴ ق(ء ب) = ق(ء جـ) ← ② قوس = قوس
بطرح ② من ①
∴ ق(ء ب) = ق(ء د) قوس = قوس
∵ ء ب = ء د وتر = وتر #

السؤال نصف العلم والمعرفة
فلا تخجل من السؤال أو كثرة الأسئلة

مثال ٧ في الشكل المقابل

أ جـ = ب ء

فأثبت أن أ ء = ب جـ



البرهان ∵ أ جـ = ب ء

وتر = وتر

∴ ق (أ ب جـ) = ق (ب أ ء)

يطرح ق (أ ب) من الطرفين

ينتج أن

ق (أ ء) = ق (ب جـ) قوس = قوس

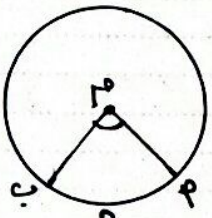
∴ أ ء = ب جـ وتر = وتر #

الدرس الثاني :-

العلاقة بين الزاوية المحيطية والمركزية والمماسية المشتركة معاً في القوس

١ الزاوية المركزية :-

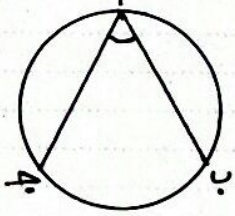
هي زاوية رأسها مركز الدائرة وضلعاها أنصاف أقطار في الدائرة .



٢ الزاوية المحيطية :-

هي زاوية رأسها تقع على الدائرة وضلعاها وتران في الدائرة

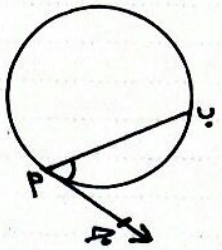
∴ ب أ جـ محيطية



٣ الزاوية المماسية :-

هي زاوية رأسها على الدائرة وضلعاها وتر ومماس مرسوم من أحدى نهايتي الوتر في الدائرة

∴ ب أ جـ مماسية تقابل أ ب



نظرية ①

قياس الزاوية المحيطية = ½ قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس

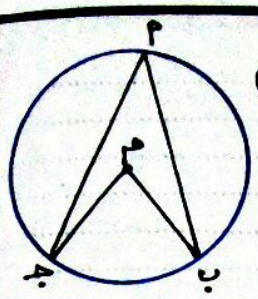
قياس الزاوية المحيطية = ½ قياس القوس المقابل لها.

∵ ق (ب أ جـ) = ½ ق (ب م جـ)

المحيطية = ½ المركزية

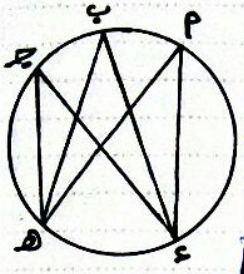
ق (ب أ جـ) = ½ ق (ب جـ)

ق (ب م جـ) = ق (ب جـ)



نظرية ②

الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس في الدائرة الواحدة متساوية في القياس

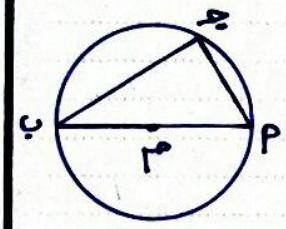


∠ أ ، ∠ ب ، ∠ جـ زوايا محيطية مرسومة على نفس القوس ء هـ

∴ ق (أ) = ق (ب) = ق (جـ)

نتيجة هامة :-

الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة



∵ أ ب قطر في الدائرة م

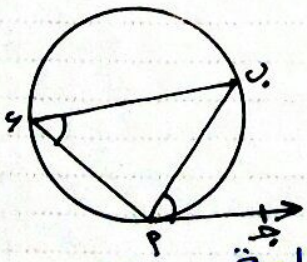
∴ ق (أ جـ ب) = ٩٠° قائمة

ملاحظات

* قياس القوس يساوي ضعف قياس الزاوية المحيطية المحصور بين ضلعيها
* قياس الزاوية المركزية تساوي ضعف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في نفس القوس

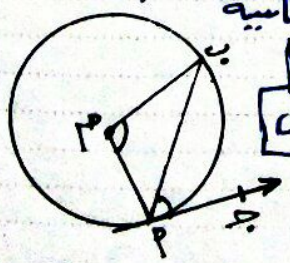
نظرية ③

قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس



ق (ء) المحيطة = ق (ب أ جـ) المماسية

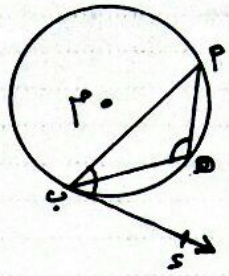
نتيجة قياس الزاوية المماسية تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس



ق (ب أ جـ) = ق (ب م أ)

ملاحظة

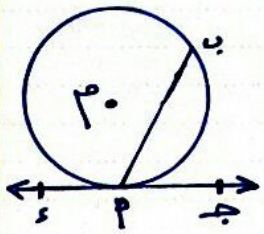
الزاوية المماسية تكمل الزاوية المحيطية المرسومة على وتر الزاوية المماسية وفى جهة واحدة منه.



ق(أ م̂ جـ) المحيطية + ق(أ ب̂ ى) المماسية = ١٨٠°

ملاحظة

قياس الزاوية المماسية = $\frac{1}{2}$ قياس القوس المحصور بين ضلعيها

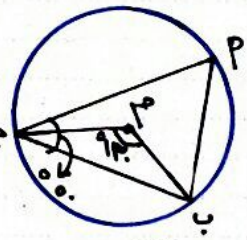


ق(ب أ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(أ ب) الأصغر

ق(ب أ ى) = $\frac{1}{2}$ ق(أ ب) الأكبر

مثال ① ق(ب م̂ جـ) = ١٣٠°

ق(أ ب̂ جـ) = ٥٠° أوجد ق(أ ب̂ جـ)



البرهان ∵ Δ أ ب جـ محيطية ،

م مركز ⊙ ، ⌒أ ب ، ⌒ب جـ مشتركتان فى ب جـ

∴ ق(أ) = $\frac{1}{2}$ ق(ب م̂ جـ) = ٦٥°

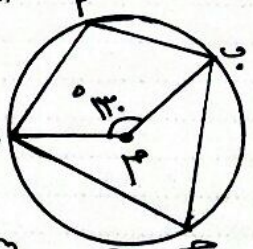
فى Δ أ ب جـ

ق(أ ب̂ جـ) = ١٨٠ − (٦٥° + ٥٠°) = ٦٥°

#

مثال ② ق(ب م̂ ى) = ١٣٠°

أوجد ق(ب ء̂ ى) ، ق(ب أ̂ ى)



البرهان ق(ب ء̂ ى) =

$\frac{1}{2}$ ق(ب م̂ ى) = ٦٥°

① محيطية ومركزية مشتركتان فى (ب أ ى)

∴ ق(ب أ ى) = $\frac{1}{2}$ ق(جـ) = $\frac{1}{2}$ × ١٣٠° = ١١٥°

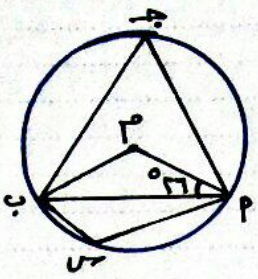
#

مثال ③ ق(م أ̂ ب) = ٢٦°

أوجد بالبرهان

① ق(م م̂ ب) ② ق(أ جـ̂ ب)

③ ق(أ س̂ ب) ④ ق(أ س̂ ب)



البرهان ∵ م أ = م ب = نق

∴ ق(م أ̂ ب) = ق(م ب̂ أ) = ٢٦°

∴ ق(أ م̂ ب) = ١٨٠ − (٢٦° + ٢٦°) = ١٢٨° ①

∴ ق(أ جـ̂ ب) = $\frac{1}{2}$ ق(أ م̂ ب) = ٦٤°

محيطية ومركزية مشتركتان فى ⌒أ س ب

∴ ق(أ م̂ ب) = ق(أ س̂ ب) = ١٢٨°

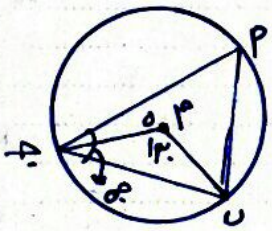
∴ ق(أ جـ ب) = ٣٦٠ − ١٢٨ = ٢٣٢°

∴ ق(أ س̂ ب) = $\frac{1}{2}$ ق(أ جـ ب) = ١١٦°

مثال ④ ق(ب م̂ جـ) = ١٣٠°

ق(أ جـ̂ ب) = ٥٠°

أوجد ق(أ ب̂ جـ).



البرهان ∵ Δ أ ب جـ محيطية ،

م مركز ⊙ ، ⌒أ ب ، ⌒ب جـ مشتركتان فى ب جـ

∴ ق(أ) = $\frac{1}{2}$ ق(ب م̂ جـ) = ٦٥°

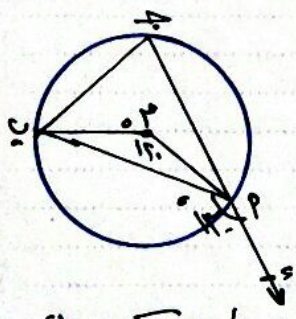
فى Δ أ ب جـ

ق(أ ب̂ جـ) = ١٨٠ − (٦٥° + ٥٠°) .

= ١٨٠ − ١١٥ = ٦٥° #

مثال ⑤ ق(ب أ̂ ى) = ١٣٠° ،

ق(أ م̂ ب) = ١٢٠° أوجد ق(م ب̂ جـ) **الحل**



فى Δ أ م ب ∵ م أ = م ب = نق

∴ ق(م ب̂ أ) = $\frac{١٨٠ - ١٢٠}{٢}$ = ٣٠°

∵ ق(جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(م) = ٦٠° ① محيطية ومركزية مشتركتان فى أ ب

∴ م(أ ب̂ جـ) = ١٣٠ − ٦٠ = ٧٠°

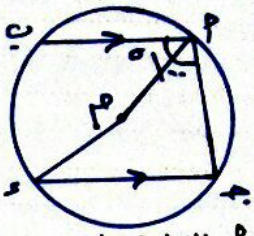
∵ ⌒أ ب خارج عن Δ أ جـ ب

∴ ق(م ب̂ جـ) = ٧٠ − ٣٠ = ٤٠°

#

مثال ٦ ق(∠ب م جـ) = ١٠٠°

$\overline{م ب} \parallel \overline{ء جـ}$ اوجد ق(∠م ء جـ)



البرهان ∵ $\overline{م ب} \parallel \overline{ء جـ}$

∴ ق(∠جـ) = ١٨٠ − ١٠٠ = ٨٠° بالتداخل

∵ ق(∠م م ء) = ٢ ق(∠جـ) = ٢ × ٨٠ = ١٦٠°

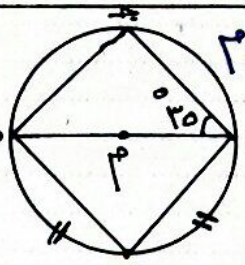
لأنهم محيطيه ومركزية مشتركتان في $\overset{\frown}{م ء}$

مثال ٧ $\overline{م ب}$ قطر في الدائرة م

طول $(\overset{\frown}{م ء})$ = طول $(\overset{\frown}{ب ء})$

ق(∠م م ب) = ٣٥°

أوجد بالبرهان ق(∠جـ ب ء)



البرهان ∵ $\overline{م ب}$ قطر ∴ ق(∠م جـ ب) = ٩٠° قائمه

لأنها محيطية مرسومة على القطر

∵ ق(∠م ب جـ) = ١٨٠ − (٣٠ + ٩٠) = ٥٥°

∵ ق(∠م م ء) = ق $(\overset{\frown}{م ء})$ = $\frac{١٨٠}{٢}$ = ٩٠°

∴ ق(∠م ب ء) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠م م ء) = ٤٥°

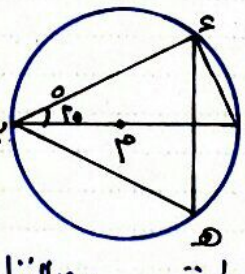
لأنها محيطيه تقابل $\overset{\frown}{م ء}$ تساوى نصفه

∴ ق(∠جـ ب ء) = ٥٥° + ٤٥° = ١٠٠° #

مثال ٨ $\overline{م ب}$ قطر في الدائرة م

ق(∠م ب ء) = ٢٥°

أوجد ق(∠ء هـ ب) بالدرجات



البرهان ∵ $\overline{م ب}$ قطر

∴ ق(∠م ء ب) = ٩٠° محيطية مرسومة على القطر

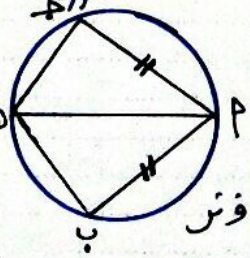
∴ ق(∠ء م ب) = ١٨٠ − (٩٠ + ٢٥) = ٦٥°

∴ ق(∠ء م ب) = ق(∠ء هـ ب) = ٦٥°

محيطيتان مرسومتان على نفس القوس ء ب

مثال ٩ م ب = م جـ

اثبت ان ق(∠م هـ ء) = ق(∠م هـ جـ)



البرهان ∵ م ب = م جـ ونصف قطر

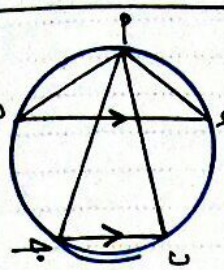
∴ ق(∠م ب) = ق(∠م جـ) قوس = قوس

∴ ق(∠م هـ ء) = ق(∠م هـ جـ) #

لأنهم محيطيتان تقابلان أقواساً متساوية #

مثال ١٠ $\overline{ء هـ} \parallel \overline{ب جـ}$

اثبت ان ق(∠ء م جـ) = ق(∠ب م هـ)



البرهان ∵ $\overline{ء هـ} \parallel \overline{ب جـ}$

∴ ق $(\overset{\frown}{ء ب})$ = ق $(\overset{\frown}{هـ جـ})$

∴ ق(∠ء م ب) = ق(∠هـ م جـ) محيطيتان على أقواس متساوية

بإضافة ق(∠ب م جـ) للطرفين

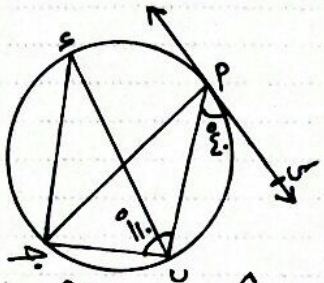
∴ ق(∠ء م جـ) = ق(∠هـ م ب) #

مثال ١١ $\overleftrightarrow{م س}$ مماس ،

ق(∠س م ب) = ٤٠° ،

ق(∠م ب جـ) = ١١٠°

أوجد ق(∠جـ ء ب)



البرهان ∵ ق(∠ب جـ م) = ق(∠س م ب) = ٤٠°

محيطية ومماسية مشتركتان في $\overset{\frown}{م ب}$

في Δ م ب جـ ق(∠ب م جـ) = ١٨٠ − (١١٠ + ٤٠)

= ٣٠°

∴ ق(∠ب ء جـ) = ق(∠ب م جـ) = ٣٠°

محيطيتان مرسومتان على نفس القوس ب جـ

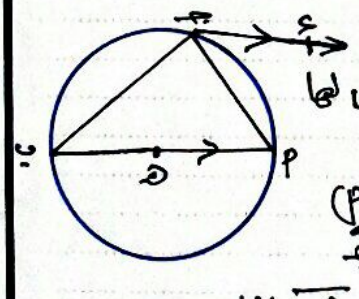
مثال ١٢ $\overline{م ب}$ قطر في دائرة

ء محيطها ٤٤ سم ، $\overleftrightarrow{جـ ء}$ مماس لها

عند جـ ، $\overleftrightarrow{جـ ء} \parallel \overline{ب م}$

أوجد مع البرهان ① ق(∠ء جـ م)

② طول $\overset{\frown}{م جـ}$



البرهان ∵ $\overleftrightarrow{جـ ء}$ مماس // $\overline{م ب}$ قطر

∴ ق(∠م جـ) = ق(∠جـ ب) = $\frac{١٨٠}{٢}$ = ٩٠°

∴ ق(∠ء جـ م) المماسية = $\frac{١}{٢}$ ق(∠م جـ) = $\frac{١}{٢}$ × ٩٠ = ٤٥° ①

ق(∠م جـ) = ٩٠°

∴ طول $\overset{\frown}{م جـ}$ = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠}$ × المحيط (٢٢ سم)

= $\frac{٩٠}{٣٦٠}$ × ٤٤ = ١١ سم

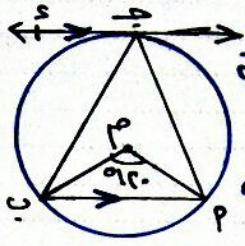
فكر ... $\sqrt{٦ + \sqrt{٦ + \sqrt{٦ + \sqrt{٦ + \sqrt{٦ + \sqrt{٣ + \cdots}}}}}}$ = ؟

(تمارين)

① $\overleftrightarrow{حـ ء}$ مماس ، $\overleftrightarrow{حـ ء} \parallel \overline{أ ب}$

ق$(\angle أ م ب) = 120°$

اثبت أن $\triangle$ حـ أ ب متساوى الأضلاع

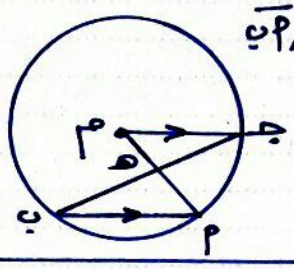


② $\overline{أ ب}$ وتر حتى حـ م $\parallel \overline{أ ب}$

، $\overline{ب جـ} \cap \overline{أ م} = \{هـ\}$

اثبت أن:

ب هـ > أ هـ



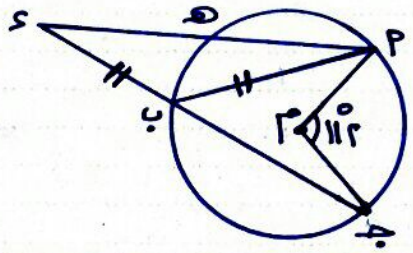
③ دائرة م

ق$(\angle أ م جـ) = 112°$

، أ ب = ء ب ،

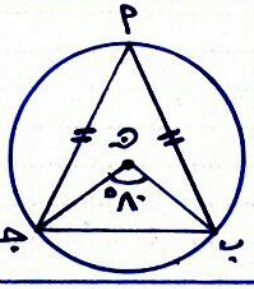
ب هـ ء حـ

أوجد ق$(\angle ء)$



④ أوجد ① ق$(\angle أ ب جـ)$

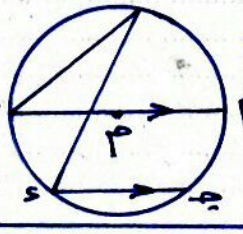
② ق$(\overset{\frown}{ب جـ})$ الأكبر



⑤ $\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م

$\overline{أ ب} \parallel \overline{حـ ء}$ ، ق$(\overset{\frown}{حـ ء}) = 80°$

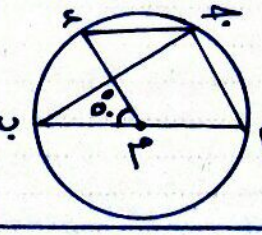
أوجد ق$(\angle هـ)$



⑥ $\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م

ق$(\angle ب م ء) = 50°$

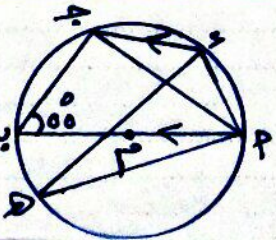
أوجد ق$(\angle أ حـ ء)$



⑦ $\overline{أ ب}$ قطر ، $\overline{ء جـ} \parallel \overline{أ ب}$

ق$(\angle أ ب جـ) = 55°$

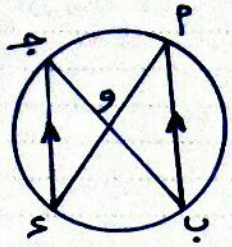
أوجد ق$(\angle هـ ء)$



⑧ $\overline{أ ب}$ ، $\overline{حـ ء}$ وتران متوازيان فى الدائرة ،

$\overline{أ ء} \cap \overline{حـ ب} = \{و\}$

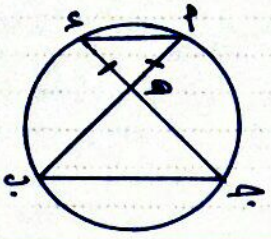
اثبت أن أ و = و ب



⑨ $\overline{أ ب} \cap \overline{حـ ء} = \{هـ\}$ ،

هـ أ = هـ ء اثبت أن

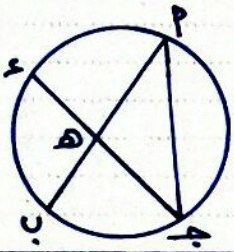
هـ ب = هـ جـ



⑩ أ ب = حـ ء ،

$\overline{أ ب} \cap \overline{حـ ء} = \{هـ\}$

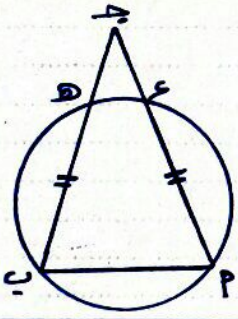
اثبت أن $\triangle$ أ هـ جـ متساوى الساقين



⑪ أ ء = ب هـ ،

$\overleftrightarrow{أ ء} \cap \overleftrightarrow{ب هـ} = \{جـ\}$

اثبت أن حـ ء = جـ هـ



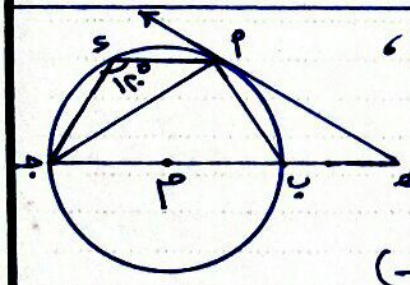
⑫ $\overleftrightarrow{هـ أ}$ مماس للدائرة م ،

ق$(\angle ء جـ) = 120°$

اثبت أن:

① ب أ = ب هـ

② ق$(\angle أ ب هـ)$ = ق$(\angle هـ أ جـ)$

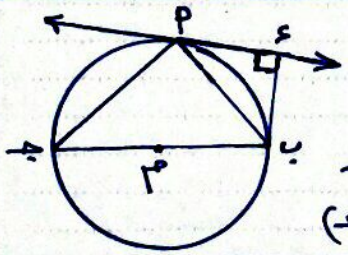


⑬ $\overleftrightarrow{أ ء}$ مماس للدائرة م

عند أ ، $\overline{ب جـ}$ قطر ،

$\overleftrightarrow{ب ء} \perp \overleftrightarrow{أ ء}$ اثبت أن:

ق$(\angle أ ب ء)$ = ق$(\angle أ جـ جـ)$

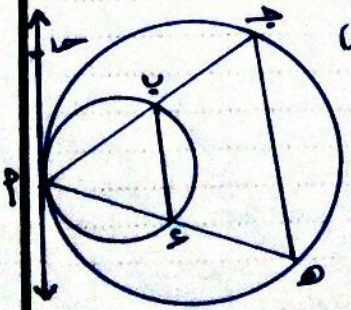


⑭ دائرتان متماستان من الداخل

فى أ ، $\overleftrightarrow{أ س}$ مماس مشترك

اثبت أن:

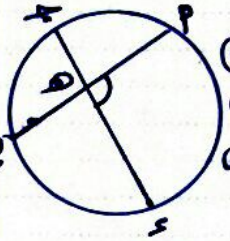
$\overline{ء ب} \parallel \overline{هـ جـ}$



٣ [تمارين مشهور]

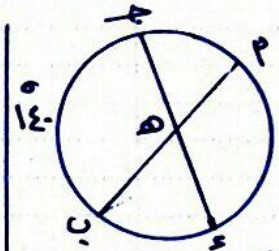
تمرين مشهور ①

إذا تقاطع وتران في نقطة داخل دائرة، فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوي نصف مجموع قياسي القوسين المقابلين لها.

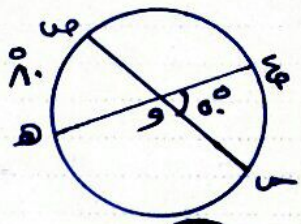


ق(∠هـ) = ½ ق(م ء) + ½ ق(جـ ب)

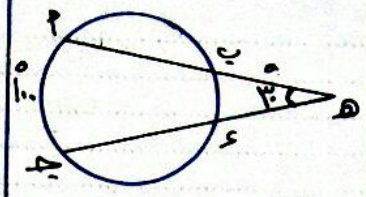
قياس القوس = ضعف الزاوية − القوس المعطى



ق(∠هـ) = ٦٠° + ٧٠° = ١٣٠°

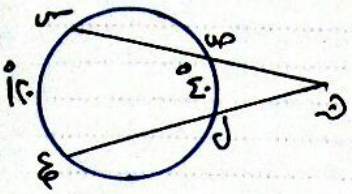


ق(س ع) = ١٠٠° − ٨٠° = ٢٠°



ق(∠ب ء) = ٤٠°

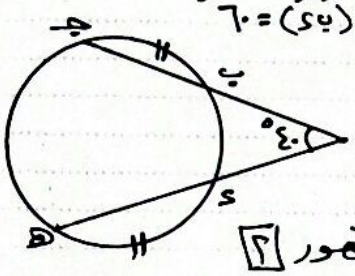
= ١٠٠ − ٦٠ = ٤٠°



ق(∠د) = ٢٠°

= ٦٠ − ٤٠ = ٢٠°

مثال ① ق(∠م) = ٤٠°، ق(ب ء) = ٦٠°



، ق(ب جـ) = ق(ء هـ)

أوجد ① ق(هـ جـ)

② ق(ب جـ)

البرهان من التمرين المشهور ②

ق(جـ هـ) الأكبر = ضعف الزاوية + الأصغر

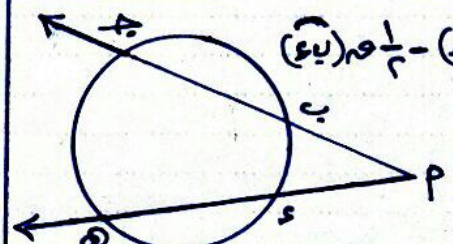
= ٨٠° + ٦٠° = ١٤٠° ... ①

∵ قياس الدائرة = ٣٦٠°

∴ ق(ب جـ) = (٣٦٠° − (٦٠° + ١٤٠°)) / ٢ = ٨٠° ... ②

تمرين مشهور ②

إذا تقاطع شعاعان حاملان لوترين في دائرة خارجها، فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوي نصف قياس القوس الأكبر محصوراً منه نصف قياس القوس الأصغر اللذين يحصرهما ضلعا هذه الزاوية.

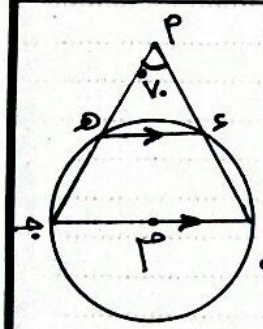


ق(∠م) = ½ ق(جـ هـ) − ½ ق(ب ء)

قياس الزاوية = ½ القوس الأكبر − ½ القوس الأصغر
الأكبر = ضعف الزاوية + القوس الأصغر
القوس الأصغر = القوس الأكبر − ضعف قياس الزاوية

← إذا كان س٣ = ٥ فإن س٣ + ١ = ...

مثال ② جـ جـ قطر في الدائرة م



، ق(∠م) = ٧٠° ، ء هـ // ب جـ

أوجد ق(ب ء)

البرهان ∵ ب جـ قطر

∴ ق(ب جـ) الأكبر = ١٨٠°

من التمرين المشهور ②

ق(ء هـ) الأصغر = الأكبر − ضعف الزاوية

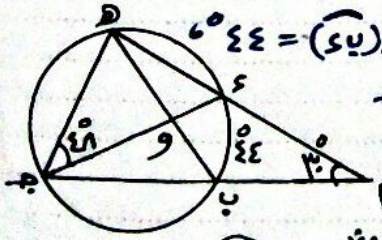
= ١٨٠° − ١٤٠° = ٤٠°

∵ ق(ب ء جـ) نصف دائرة = ١٨٠°

∵ ء هـ // ب جـ ∴ ق(ء ب) = ق(هـ جـ)

∴ ق(ب ء) = (١٨٠° − ٤٠°) / ٢ = ٧٠° #

مثال ③ ق(∠م) = ٣٠°، ق(ب ء) = ٤٤°



ق(ء جـ هـ) = ٤٨° أوجد

① ق(جـ هـ)

② ق(ب جـ)

البرهان من التمرين المشهور ②

∵ ق(جـ هـ) = ضعف ق(∠م) + ق(ء ب) الأصغر

= ٦٠° + ٤٤° = ١٠٤° ... ①

∵ ∠(ء جـ هـ) محيطية تقابل القوس ءهـ

∴ ق(ءهـ) = ٢ × ٤٨ = ٩٦°

∵ قياس الدائرة = ٣٦٠°

∴ ق(ب جـ) = ٣٦٠° − (٩٦° + ١٠٤° + ٤٤°)

= ١١٦° #

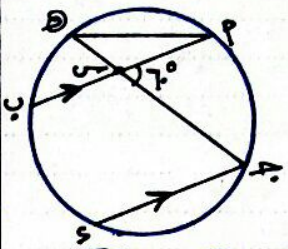
مثال ٤ أ ب // جـ ء ،

ق(أ س جـ) = ٦٠° ،

ق(أ جـ) = ٨٠°

أوجد بالبرهان

① ق(أ هـ جـ) ② ق(ب ء) ③ ق(ب هـ)



البرهان

① ق(أ هـ جـ) = ½ ق(أ جـ)

= ٤٠° محيطية تقابل أ جـ #①

② ∵ أ ب // جـ ء ∴ ق(أ جـ) = ق(ب ء)

= ٨٠° #②

من التمرين المشهور الأول

ق(هـ ب) = ٢ ق(أ س جـ) − ق(أ جـ)

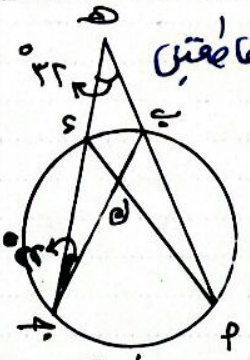
= ١٢٠° − ٨٠° = ٤٠° #③

مثال ٥ أ ء ، ب جـ وتران متقاطعان

بحيث ق(جـ) = ٢٢° ،

ق(هـ) = ٣٢° أوجد

ق(أ هـ جـ)



البرهان

∵ ق(ب ء) = ½ ق(ب ء) محيطية

∴ ق(ب ء) = ٢ × ٢٢ = ٤٤°

من التمرين المشهور ②

ق(أ جـ) = ٢ × ٣٢ + ق(ب ء)

= ٦٤ + ٤٤ = ١٠٨°

من التمرين المشهور ①

ق(أ هـ جـ) = ½ ق(ب ء) + ½ ق(أ جـ)

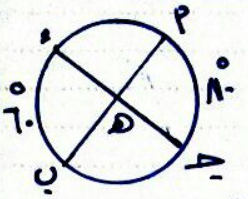
= ٢٢ + ٥٤ = ٧٦° #

فكر ٤ جا ٣٠ = ...

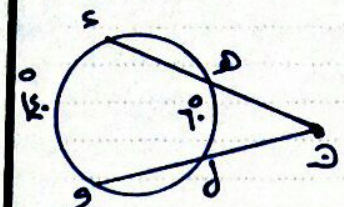
(تمارين)

(على التمارين المشهورة)

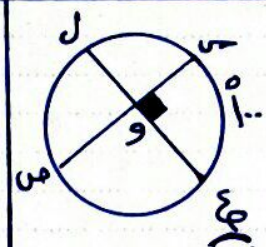
① أكمل مايأتي



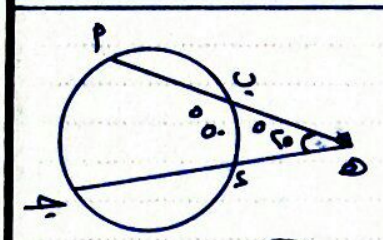
ق(أ هـ جـ) = ...



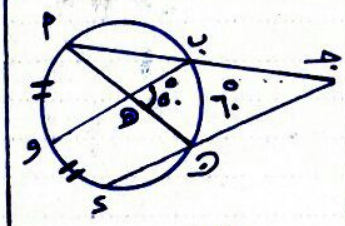
ق(ء) = ...



ق(ل هـ س) = ...



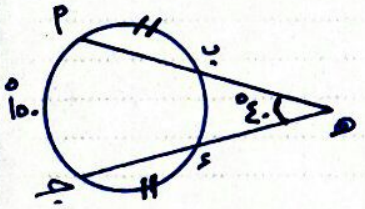
ق(أ جـ) = ...



ق(أ ب ء) = ...

ق(أ ء جـ) = ...

ق(جـ) = ...



ق(ب ء) = ...

ق(أ ب) = ...

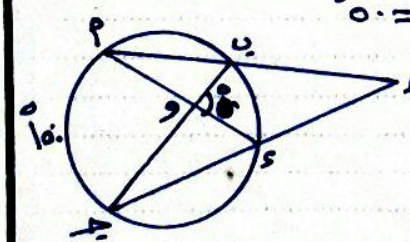
مثال ② ق(ب ء ى) = ٥٠°

ق(أ جـ) = ١٥٠° ،

① أوجد ق(ب ء)

② أوجد ق(ب أ ء)

③ أوجد ق(هـ)



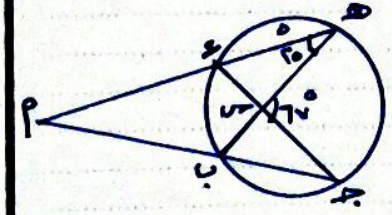
مثال ③ ق(جـ) = ٢٥°

ق(هـ س جـ) = ٦٧°

اثبت أن

ق(أ ب هـ) = ق(أ ء جـ)

= ١٣٨°

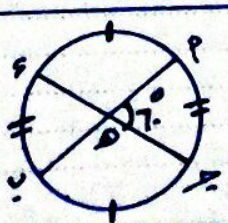


مثال ④ ق(أ جـ) = ق(ء ب) ،

ق(أ ء) = ق(جـ ب) ،

ق(أ هـ جـ) = ٦٠°

أوجد ق(أ ء)



الدرس الرابع

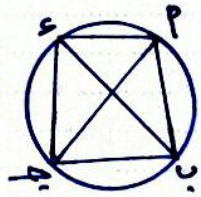
[الشكل الرباعى الدائرى]

هو شكل رباعى جميع رؤوسه تقع على دائرة واحدة

⇐ المستطيل والمربع وشبه المنحرف المتساوى الساقين أشكال رباعية دائرية بينما متوازى الأضلاع والمعين وشبه المنحرف الغير متساوى الساقين ليست أشكالاً رباعيه دائرية

خواص الشكل الرباعى الدائرى

١ كل زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها تكونان متساويتان فى القياس



أصل ١

ق(أ ب̂ ء) = ق(أ ج̂ ء)

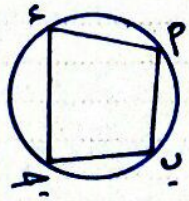
مرسومتان على القاعدة أ ء

وأيضاً : ق(ب أ̂ جـ) = ق(ب ء̂ جـ)

مرسومتان على القاعدة ب جـ وهكذا

⇐ الزاويتان المرسومتان على قاعدة واحدة وفى جهتين مختلفتين منها متكاملتان

٢ كل زاويتان متقابلتان متكاملتان (مجموع قياسهم ١٨٠°)

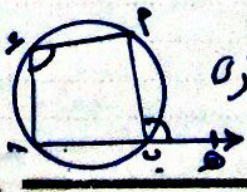


أ ب جـ ء رباعى دائرى

فإنه ق(أ̂) + ق(جـ̂) = ١٨٠°

ق(ب̂) + ق(ء̂) = ١٨٠°

٣ قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رؤوس الرباعى الدائرى تساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها



∴ ق(أ ب̂ هـ) = ق(ء̂)

متى يكون الشكل الرباعى دائرياً :-

لإثبات أن الشكل الرباعى دائرى يجب أن نثبت إحدى الخواص الآتية :

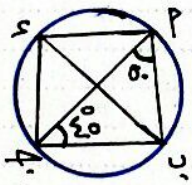
١ إذا وُجدت نقطة فى مستوى الشكل تكون على أبعاد متساويه من رؤوسه

٢ إذا وُجدت زاويتان متساويتان فى القياس ومرسومتان على ضلع من أضلاعه كقاعدة وفى جهه واحدة من هذه القاعدة

٣ إذا وُجدت زاويتان متقابلتان متكاملتان (مجموعهم = ١٨٠°)

٤ إذا وُجدت زاوية خارجة عند أى رأس من رؤوسه قياسها يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها.

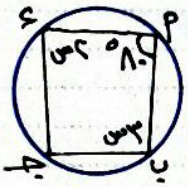
أ ب جـ ء شكل رباعى دائرى



ق(ب ء̂ جـ) = ... °

ق(ب ء̂ أ) = ... °

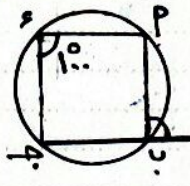
أ ب جـ ء رباعى دائرى



ق(أ̂) = ... °

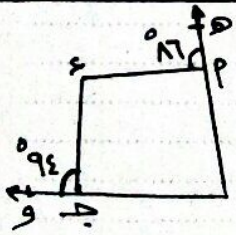
س = ... °

أ ب جـ ء رباعى دائرى



ق(أ ب̂ هـ) = ...

أ ب جـ ء رباعى دائرى



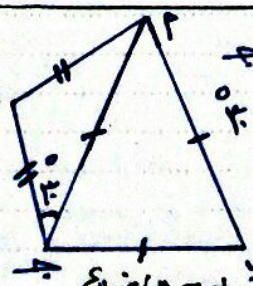
إثبت أن أ ب جـ ء رباعى دائرى

مثال ١ أ ب = ب جـ = أ جـ

، أ ء = ء جـ ، ق(أ ج̂ ء) = ٣٠°

إثبت أن

أ ب جـ ء رباعى دائرى



البرهان ∵ Δ أ ب جـ متساوى الأضلاع

∴ ق(ب̂) = ٦٠° فى Δ أ ء جـ المتساوى الساقين

ق(ء أ̂ جـ) = ق(أ ج̂ ء) = ٣٠° ∴ ق(ء̂) = ١٨٠ - ٦٠ - ٣٠ = ١٢٠°

∴ ق(ب̂) + ق(ء̂) = ٦٠ + ١٢٠ = ١٨٠° متقابلتان متكاملتان

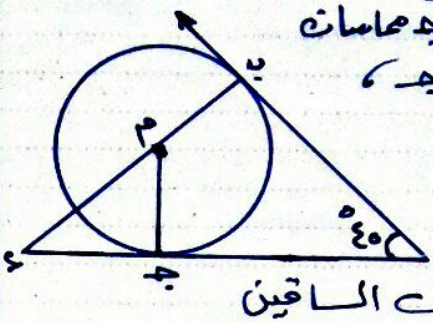
∴ أ ب جـ ء رباعى دائرى #

مثال ٢ $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماسان للدائرة عند ب ، جـ ، ق(أ) = هـ°

إثبت :

① $\overline{أب}$ م جـ رباعي دائري

② Δ م جـ د متساوي الساقين



البرهان ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس ، $\overline{مب}$ نصف القطر

∴ ق($\hat{أبم}$) = ٩٠°

∵ $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماس ، $\overline{مجـ}$ نصف القطر

∴ ق($\hat{أجـم}$) = ٩٠°

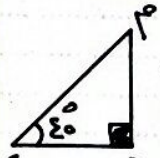
∵ ق($\hat{أبم}$) + ق($\hat{أجـم}$) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°

متقابلتان متكاملتان

∴ $\overline{أبم}$ جـ رباعي دائري # ①

في Δ أبد ق($\hat{د}$) = ١٨٠° − (٤٥° + ٩٠°)

= ١٨٠° − ١٣٥° = ٤٥°



في Δ م جـ د

ق($\hat{جمد}$) = ١٨٠° − (٩٠° + ٤٥°) = ٤٥°

∴ ق($\hat{جمد}$) = ق($\hat{جدم}$) = ٤٥°

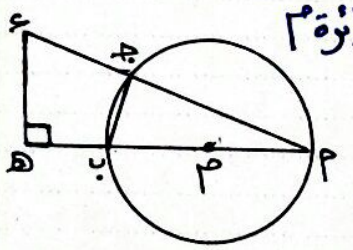
∴ Δ م جـ د متساوي الساقين

مثال ٣ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م

$\overleftrightarrow{دهـ} \perp \overleftrightarrow{أب}$

إثبت أن :

الشكل ب هـ د جـ رباعي دائري



البرهان ∵ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م

∴ ق($\hat{أجـب}$) = ٩٠° محيطية في نصف دائرة

∴ $\overline{بجـ} \perp \overline{أد}$

∴ ق($\hat{أجـب}$) = ق($\hat{هـ}$) وهي خارجة عن الشكل جـ ب هـ د ، د هـ مقابلة للمجاورة لها

∴ جـ ب هـ د رباعي دائري

مثال ٤ أ ب جـ د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة م

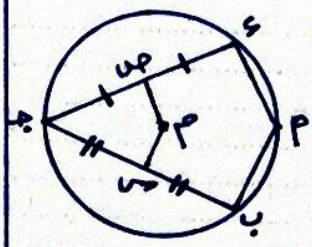
، س منتصف $\overline{بجـ}$

، ص منتصف $\overline{دد}$

إثبت أن

① الشكل م س جـ ص رباعي دائري .

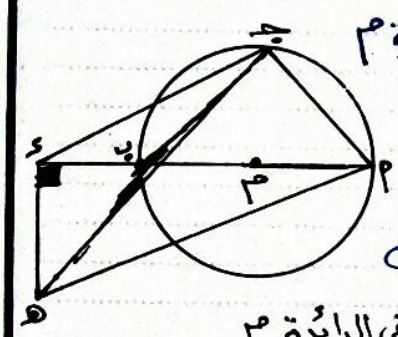
② ق(س م ص) = ق($\hat{بأد}$)



مثال ٥ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م ، ر(د هـ) $\perp$ $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـب} \cap \overleftrightarrow{دهـ} = \{هـ\}$

إثبت أن

أ م جـ د هـ شكل رباعي دائري



البرهان ∵ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م

∴ Δ أ جـ ب محيطية مرسومة في نصف دائرة

∴ ق($\hat{أجـب}$) = ٩٠°

∴ ق($\hat{أجـهـ}$) = ق($\hat{أدهـ}$) = ٩٠°

وهما مرسومتان على القاعدة $\overline{أهـ}$

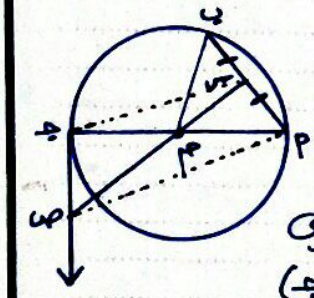
∴ أ جـ د هـ رباعي دائري #

مثال ٦ $\overline{أجـ}$ في الدائرة م ، س منتصف $\overline{أب}$ ، جـ ص مماس للدائرة قطع $\overleftrightarrow{سم}$ في ص

إثبت أن

① الشكل م س جـ ص رباعي دائري

② ق($\hat{بمجـ}$) = ٢ ق($\hat{مجـص}$)



البرهان ∵ س منتصف $\overline{أب}$ ∴ ق($\hat{س}$) = ٩٠°

∵ $\overline{أجـ}$ قطر ، ∴ جـ ص مماس عند جـ

∴ ق($\hat{جـ}$) = ٩٠°

∴ ق($\hat{أسص}$) = ق($\hat{أجـص}$) = ٩٠°

وهما مرسومتان على القاعدة $\overline{أص}$

∴ أ س جـ ص رباعي دائري # ①

∵ ق($\hat{بمجـ}$) = ٢ ق($\hat{بأجـ}$) ← ②

مركزية ومحيطية مرسومتان على $\overset{\frown}{بجـ}$

∵ ق($\hat{بأجـ}$) = ق($\hat{مجـص}$) ← ② مرسومتان على قاعدة واحدة

من ①، ② ∴ ق($\hat{بمجـ}$) = ٢ ق($\hat{مجـص}$) #

البرهان ∵ س منتصف $\overline{بجـ}$ ∴ ق($\hat{س}$) = ٩٠°

∵ ص منتصف $\overline{دجـ}$ ∴ ق($\hat{ص}$) = ٩٠°

∴ ق($\hat{ص}$) + ق($\hat{س}$) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°

متقابلتان متكاملتان

∴ م س جـ ص رباعي دائري # ①

∴ ق(ص م س) + ق($\hat{جـ}$) = ١٨٠° ← ①

∵ $\overline{أبجـ}$ رباعي دائري

∴ ق($\hat{بأد}$) + ق($\hat{جـ}$) = ١٨٠° ← ②

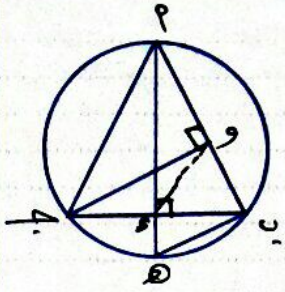
من ①، ② ينتج أن

ق(ص م س) = ق($\hat{بأد}$) #

مثال ٧ $\overline{أد} \perp \overline{بجـ}$ ، $\overline{هو} \perp \overline{أب}$ إثبت أن

① الشكل أ و جـ د رباعي دائري

② ق(∠ب هـ جـ) = ق(∠د و جـ)



البرهان

∵ $\overline{هو} \perp \overline{أب}$ ، ∴ $\overline{أد} \perp \overline{بجـ}$

∴ ق(∠أ و جـ) = ق(∠أ د جـ) = ٩٠°

وهما مرسومتان على القاعدة $\overline{أجـ}$

∴ الشكل أ و جـ د رباعي دائري #①

ينتج من الرباعي الدائري أن

~~② ق(∠ب هـ جـ) = ق(∠د و جـ)~~

∵ ق(∠د و جـ) = ق(∠د أ جـ) مرسومتان على قاعدة واحدة $\overline{دجـ}$ ← ①

∴ ق(∠ب هـ جـ) = ق(∠أ جـ) ← ②

محيطيتان مرسومتان على نفس القوس $\overset{\frown}{هجـ}$

من ① ، ② ينتج أن

ق(∠ب هـ جـ) = ق(∠د و جـ) #②

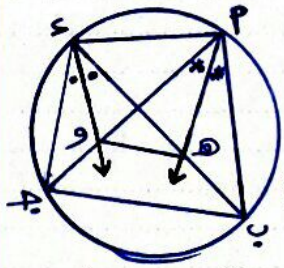
مثال ٨ أ ب جـ د رباعي دائري

$\overleftarrow{هأ}$ ينصف ∠د أ جـ ،

$\overleftarrow{دو}$ ينصف ∠د جـ ب

إثبت أن ① أ هـ و د رباعي دائري

② $\overline{هو} \parallel \overline{بجـ}$



البرهان

∵ ق(∠ب أ جـ) = ق(∠ب د جـ) محيطيتان مرسومتان على قاعدة واحدة

∴ $\frac{1}{2}$ ق(∠ب أ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ب د جـ)

∴ ق(∠هـ أ د) = ق(∠هـ د و) وهما مرسومتان على القاعدة $\overline{هد}$

∴ أ هـ و د شكل رباعي دائري #①

من الشكل الرباعي الدائري أ هـ و د نستنتج أن

ق(∠د هـ و) = ق(∠د أ و) مرسومتان على القاعدة $\overline{وء}$ ← ①

∵ ق(∠ب هـ جـ) = ق(∠جـ أ ء) ← ②

محيطيتان مرسومتان على نفس القوس $\overset{\frown}{جء}$

من ① ، ② ينتج أن

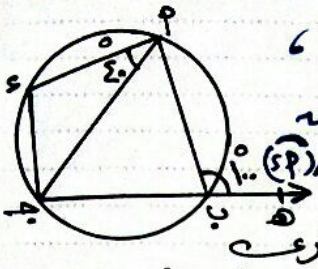
ق(∠ب هـ جـ) = ق(∠د و جـ) وهما في وضع تناظر

∴ $\overline{هو} \parallel \overline{بجـ}$ # ②

مثال ٩ ق(∠أ ب هـ) = ١٠٠° ،

ق(∠جـ أ ء) = ٤٠° أوجد

~~ق(∠ب جـ ء)~~ ق(∠ء) = ق($\overset{\frown}{أء}$) = ١٠٠°



البرهان

∵ أ ب جـ ء رباعي دائري

∵ ∠أ ب هـ خارجة عن الشكل الرباعي الدائري أ ب جـ ء

∴ ق(∠أ ب هـ) = ق(∠ء) = ١٠٠°

في Δ أ جـ ء ق(∠أ جـ ء) = ١٨٠° − (١٠٠° + ٤٠°)

∴ ق(∠أ جـ ء) = ٤٠°

∴ ق(∠ء أ جـ) = ق(∠أ جـ ء) = ٤٠°

∴ Δ أ ء جـ متساوي الساقين

∴ أ ء = ء جـ وتر = وتر

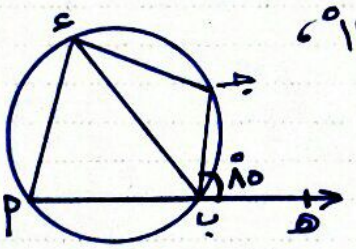
∴ ق($\overset{\frown}{ء أ}$) = ق($\overset{\frown}{ء جـ}$) قوس = قوس

#

مثال ١٠ ق($\overset{\frown}{أب}$) = ١١٠° ،

ق(∠جـ ب هـ) = ٨٥°

أوجد : ق(∠ب ء جـ)



البرهان

∵ ∠جـ ب هـ خارجة عن الشكل الرباعي الدائري

جـ ب أ ء ∴ ق(∠جـ ب هـ) = ق(∠جـ ء أ) = ٨٥°

∵ ق($\overset{\frown}{أب}$) = ١١٠° ∴ ق(ب ء أ) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{أب}$)

∴ ق(∠ب ء أ) = ٥٥°

∴ ق(∠ب ء جـ) = ٨٥° − ٥٥° = ٣٠° #

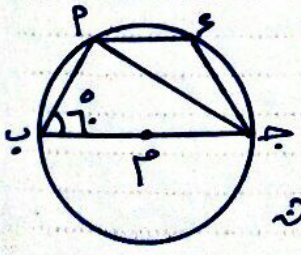
مثال ١١ أ ب جـ ء رباعي دائري

$\overline{جب}$ قطر في الدائرة م ،

ق(∠أ ب جـ) = ٦٠° ،

طول $\overline{أء}$ = طول $\overline{جء}$ إثبات أن

$\overleftarrow{جم}$ ينصف ∠ء جـ ب



البرهان

∵ $\overline{جب}$ قطر في الدائرة م

∴ ق(∠جـ أ ب) = ٩٠° قائمة محيطية مرسومة في نصف دائرة

∵ ق(أ̂) = ق(جـ̂)

∴ أ د = جـ د ∴ Δ د جـ أ متساوى الساقين

∴ أ د جـ ب رباعى دائرى

∴ ق(د̂) = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠° (متقابلتان متكاملتان)

فى Δ د جـ أ ق(د أ̂ جـ) = (١٨٠ − ١٢٠) / ٢ = ٣٠°

فى Δ أ جـ ب ∴ ق(أ جـ̂ ب) = ١٨٠° − (٦٠° + ٩٠°)

∴ ق(أ جـ̂ ب) = ٣٠°

∴ ق(د جـ̂ أ) = ق(أ جـ̂ ب) = ٣٠°

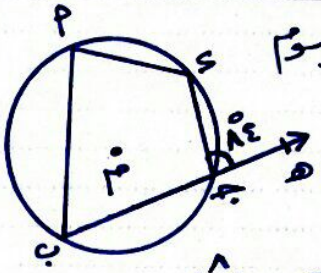
∴ جـ أ ينصف د جـ ب #

مثال ١٢ أ ب جـ د رباعى مرسوم داخل دائرة م

ق(د جـ̂ هـ) = ٨٤°

ق(ب̂) = ½ ق(د̂)

أوجد ① ق(أ̂) ② ق(ب̂)



البرهان ∵ د جـ هـ خارجة عن الشكل الرباعى أ ب جـ د

∴ ق(د جـ̂ هـ) = ق(أ̂) = ٨٤° # ①

∵ أ ب جـ د ∴ ق(ب̂) + ق(د̂) = ١٨٠°

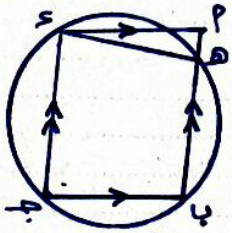
∴ ق(ب̂) = ⅓ ق(د̂)

∴ ق(ب̂) = ١٨٠ / ٣ = ٦٠°

∴ ق(ب̂) = ٦٠° # ②

مثال ١٣ أ ب جـ د متوازى أضلاع

إثبت أن: أ د = هـ د



البرهان ∵ د هـ ب جـ رباعى دائرى

∴ ق(أ هـ̂ د) = ق(جـ̂) ← ①

خارجة عن الرباعى الدائرى هـ ب جـ د

∵ أ ب جـ د متوازى أضلاع

∴ ق(أ̂) = ق(جـ̂) ← ②

من ① ، ② ينتج أن

ق(أ هـ̂ د) = ق(أ̂)

∴ Δ د أ هـ متساوى الساقين ∴ أ د = هـ د

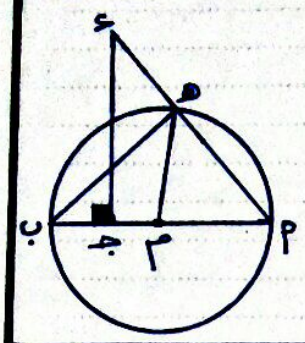
#

تمارين على الشكل الرباعى الدائرى

١ أ ب قطر فى الدائرة م ، د جـ ⊥ أ ب إثبت أن

① النقط د ، هـ ، جـ ، ب يمر بها دائرة واحدة

② ق(أ م̂ هـ) = ٢ ق(د̂)



٢ أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ

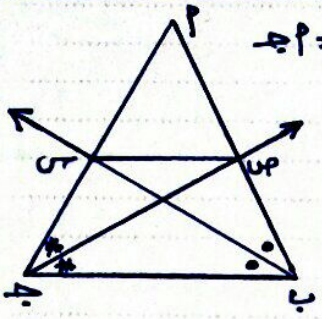
ب س ينصف د ب ،

جـ ص ينصف د جـ ،

إثبت أن

① ب جـ س ص رباعى دائرى

② س ص ↔ // ب جـ ↔

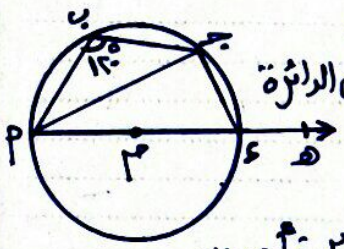


٣ أ ب جـ د رباعى دائرى

ق(ب̂) = ١٢٠° ، أ د قطر فى الدائرة

① أوجد ق(جـ د̂ هـ) ، ق(جـ أ̂ د)

② إذا كان: د جـ = ٢٧ سم أوجد طول أ د حيث (π = ٢٢/٧)

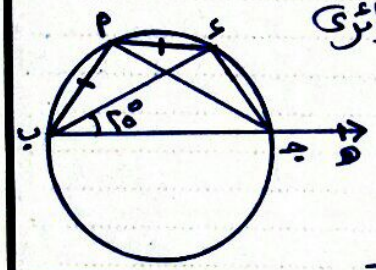


٤ أ ب جـ د شكل رباعى دائرى فيه أ ب = أ د

ق(هـ ب̂ د) = ٢٥°

ق(هـ جـ̂ د) = ١٣٠°

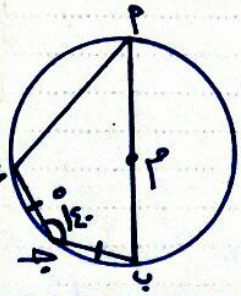
إثبت أن أ د = د جـ



٥ أ ب جـ د رباعى دائرى ، جـ ب = جـ د

ق(ب جـ̂ د) = ١٤٠°

أوجد ① ق(أ̂) ② ق(د̂)

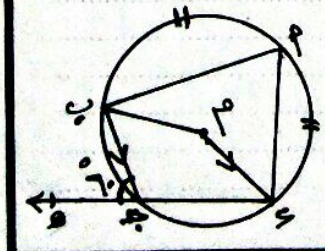


٦ ق(ب جـ̂ هـ) = ٦٠° ، ب جـ // أ د ،

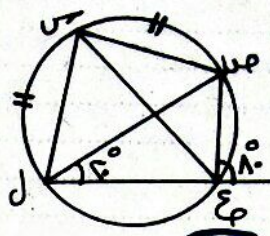
م منتصف ب د الأكبر

إذا كان ① أ د = جـ م = ٥ سم

② أ جـ قطر فى الدائرة .



مثال (١١)



س منتصف $\overset{\frown}{صل}$ ،
ق(∠ص ع ن) = ٨٠° ،
ق(∠ص ل ع) = ٤٠° ،
أوجد ق(∠ع س ل) ، ق($\overset{\frown}{س ص ع}$)

مثال (١٢)

$\overline{ب ج}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{ب أ}$ وتر فيها ، ء ∈ $\overline{أ ج}$ بحيث ق(∠أ ء ج) = ١١٨° ، $\overline{ر س}$ // $\overline{ء ج}$ ويقطع الدائرة فى هـ

① أوجد ق(∠أ ب ج)

② إثبت أن ق(∠أ ج ء) = ق(∠ج ب هـ)

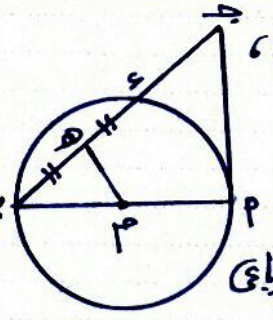
مثال (١٣)

أ ب ج مثلث حاد الزوايا مرسوم داخل دائرة ، $\overline{ر س}$ // $\overline{أ ج}$ ، $\overline{أ ء}$ ⊥ $\overline{ب ج}$ ليقطع $\overline{ب ج}$ عند ء ويقطع الدائرة عند هـ ، $\overline{ر س}$ ، $\overline{هـ ق}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ ليقطع $\overline{أ ب}$ عند ق

إثبت أن ① الشكل أ ق ء ج رباعى دائرى

② ق(∠ب ق ء) = ق(∠ب هـ ء)

مثال (١٤)

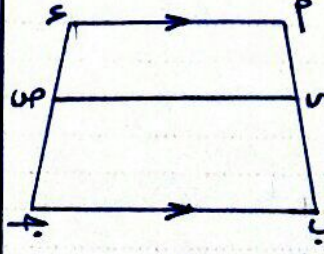


$\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{أ ج}$ مماس لها عند أ ، هـ منتصف $\overline{ء ب}$ ، ق(∠ب) = ٤٠°

① إثبت أن : الشكل أ م هـ ج رباعى دائرى

② أوجد ق(∠ج)

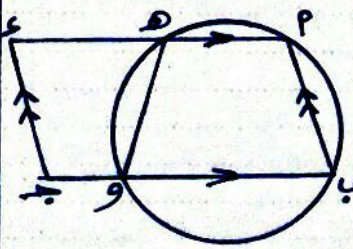
مثال (١٥)



أ ب ء ج شكل رباعى فيه $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب ج}$ ، ص ∈ $\overline{أ ب}$ ، س ∈ $\overline{ء ج}$ فإذا كان الشكل أ ص س ء رباعى دائرى

إثبت أن الشكل ص ب ج س رباعى دائرى.

مثال (١٦)



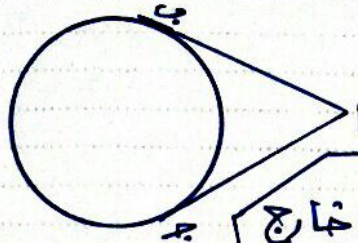
أ ب ج ء متوازى أضلاع

إثبت أن الشكل ج ء هـ و رباعى دائرى.

الدرس الخامس :-

[العلاقة بين مماسات الدائرة]

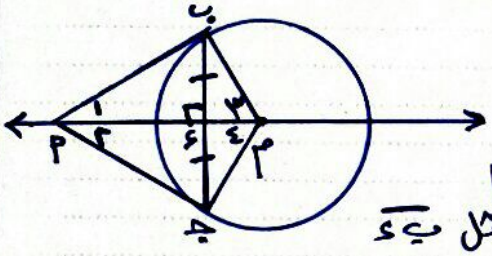
نظرية (٤)



القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة متساويتان فى الطول.

∵ $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ ج}$ قطعتان مماستان مرسومتان من أ ∴ أ ب = أ ج

نتائج هامة



$\overleftrightarrow{أ م}$ ⊥ $\overline{ب ج}$ ، ب ء = ء ج

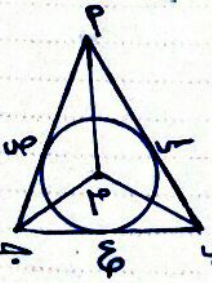
∴ $\overleftrightarrow{أ م}$ محور تماثل $\overline{ب ج}$

١ المستقيم المار بمركز الدائرة ونقطة تقاطع مماسين لها يكون محوراً لوتر التماس لهذين المماسين

٢ المستقيم المار بمركز الدائرة ونقطه تقاطع مماسين لها ينصف الزاوية بين هذين المماسين كما ينصف الزاوية بين نصفى القطرين المارين بنقطتى التماس.

ق(∠١) = ق(∠٢) ، ق(∠٣) = ق(∠٤)

مركز الدائرة الداخله لأى مثلث هو نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية.



لاحظ أن

أ س = أ ص قطعتان مماسيتان مرسومتان من أ

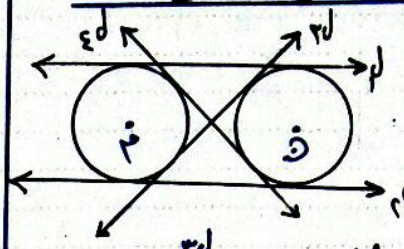
ب س = ب ع قطعتان مماسيتان مرسومتان من ب

ج ع = ج ص قطعتان مماسيتان مرسومتان من ج

[الرياضيات غذاء العقل]

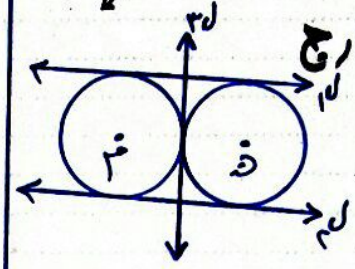
* عدد المماسات المشتركة لدائرتين :-

١ متباعدتان



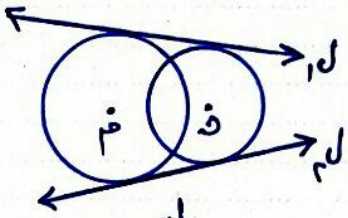
٤ مماسات مشتركة

٢ متماستان من الخارج



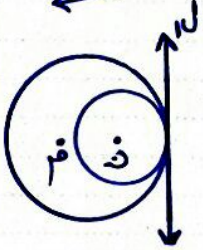
٣ مماسات مشتركة

٣ متقاطعتان



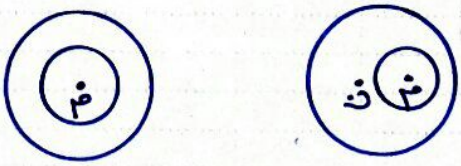
٢ مماسان مشتركان

٤ متماستان من الداخل



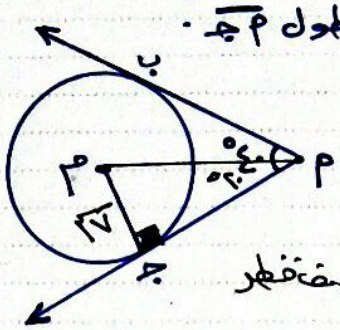
١ مماس واحد

٥ متداخلتان ، متحدتي المركز



عدد المماسات المشتركة = صفر

مثال ٢ $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، جـ على الترتيب ، ق(أ) = ٤٠° ، إذا كان طول نصف قطر الدائرة ٧ سم أوجد لأقرب سنتيمتر : طول $\overline{أجـ}$.



البرهان : $\overline{مب}$ ، $\overline{مجـ}$ ، $\overline{مأ}$

$\overline{مأ}$ ينصف ∠م

∴ ق(∠مأجـ) = ٢٠°

∵ $\overline{أجـ}$ مماس ، $\overline{مجـ}$ نصف قطر

∴ ق(∠جـ) = ٩٠°

ظا(∠مأجـ) = $\frac{مجـ}{أجـ}$

ظا٢٠ = $\frac{٧}{أجـ}$ ⟹ أجـ = $\frac{٧ \times ١}{ظا٢٠}$ ≈ ١٩ سم

مثال ٣ $\overleftrightarrow{أس}$ ، $\overleftrightarrow{بس}$ مماسان للدائرة عند أ ، ب

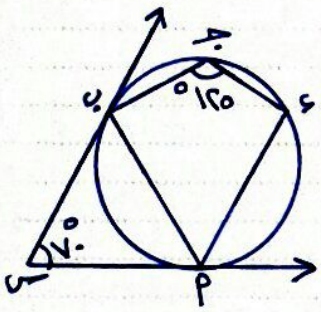
ق(∠أسب) = ٧٠° ،

ق(∠جـ) = ١٢٥° ،

أثبت أن :

١ $\overrightarrow{أب}$ ينصف ∠ء أ س

٢ $\overrightarrow{أء}$ // $\overleftrightarrow{سب}$



البرهان

∵ أ ء ب ر دائرى

∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − ١٢٥° = ٥٥° (متقابلتان متكاملتان)

∵ $\overline{سأ}$ ، $\overline{سب}$ قطعتان مماستان مرسومتان من س

∴ سأ = سب

∴ Δ س أ ب متساوى الساقين

∴ ق(∠سأب) = ق(∠سبأ) = $\frac{١٨٠ - ٧٠}{٢}$ = ٥٥°

∴ ق(∠سأب) = ق(∠ء أ ب) = ٥٥°

∴ $\overrightarrow{أب}$ ينصف ∠ء أ س ∎ ①

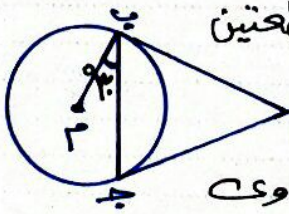
∴ ق(∠ء أ س) = ٥٥° + ٥٥° = ١١٠°

∴ ق(∠ء أ س) + ق(∠س) = ١١٠ + ٧٠ = ١٨٠°

وهما فى وضع تداخل

∴ $\overrightarrow{أء}$ // $\overleftrightarrow{سب}$ ∎ ②

مثال ١ $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتين مماستين للدائرة م ، ق(∠بأجـ) = ٣٠° ، أثبت أن Δ أ ب جـ متساوى الأضلاع



البرهان ∵ $\overline{أب}$ مماس ، $\overline{مب}$ نصف قطر

∴ ق(∠أبم) = ٩٠°

∴ ق(∠بأجـ) = ٩٠° − ٣٠° = ٦٠°

∴ أب = أجـ قطعتان مماستان مرسومتان من أ

∴ Δ أ ب جـ متساوى الأضلاع ∎

أى مثلث متساوى الساقين فيه زاوية قياسها ٦٠° يكون مثلث متساوى الأضلاع

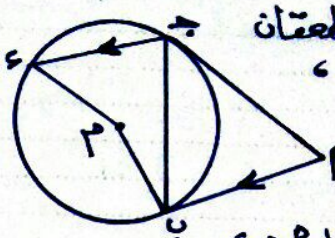
الاعتذار عن الخطأ لا يجرح كرامتك بل يجعلك كبيراً بعين من أخطأت بحقه

مثال ٤ $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماسيتان للدائرة م ،

$\overline{أب} \parallel \overleftarrow{جـ د}$ ، $ق(\angle ب م د) = ١٣٠°$

① إثبت أن: $\overleftarrow{جـ ب}$ ينصف $\angle أجـ د$

② أوجد: $ق(\angle أ)$



البرهان $ق(\angle ب جـ د) = \frac{1}{2} ق(\angle ب م د) = ٦٥°$

محيطية ومركزية مشتركتان في القوس $\overset{\frown}{ب د}$

∴ $\overline{جـ د} \parallel \overline{أ ب}$

∴ $ق(\angle أ ب جـ) = ق(\angle ب جـ د) = ٦٥°$ بالتبادل

∴ $أب = أجـ$ قطعتان مماسيتان له

∴ $\Delta أ ب جـ$ متساوي الساقين

∴ $ق(\angle أ جـ ب) = ق(\angle أ ب جـ) = ٦٥°$

∴ $ق(\angle أ جـ ب) = ق(\angle ب جـ د) = ٦٥°$

∴ $\overleftarrow{جـ ب}$ ينصف $\angle أجـ د$ # ①

في $\Delta أ ب جـ$

$ق(\angle أ) = ١٨٠° - (٦٥° + ٦٥°)$

$= ١٨٠° - ١٣٠° = ٥٠°$ # ②

في الدائرة م $\overline{هـ أ}$ ، $\overline{هـ جـ}$ مماستان من عنده

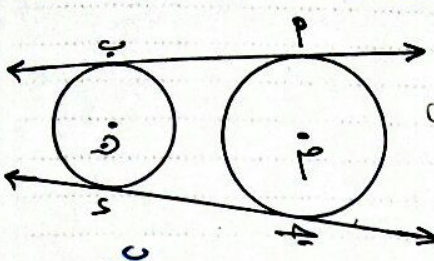
∴ $هـ أ = هـ جـ$ ← ①

في الدائرة ن $\overline{هـ د}$ ، $\overline{هـ ب}$ مماستان من عنده

∴ $هـ د = هـ ب$ ← ②

بجمع ① ، ② ∴ $أب = جـ د$ #

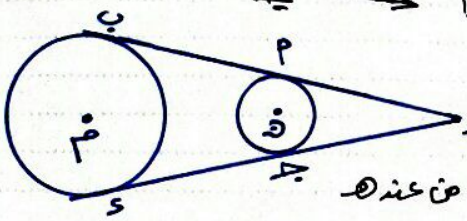
مثال ٧



$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـ د}$ مماسان

إثبت أن: $أب = جـ د$

البرهان



∴ $\overline{هـ أ}$ ، $\overline{هـ جـ}$ مماسان للدائرة من عنده

∴ $هـ أ = هـ جـ$ ← ①

∴ $\overline{هـ ب}$ ، $\overline{هـ د}$ مماسان للدائرة ن من عنده

∴ $هـ ب = هـ د$ ← ② بطرح ① من ②

∴ $أب = جـ د$ #

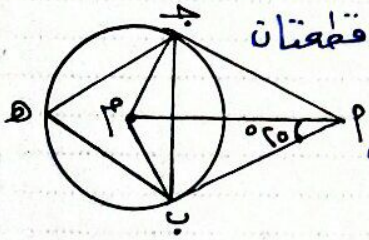
تمارين
على المماسات في الدائرة

مثال ① $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م ،

$ق(\angle ب أ م) = ٢٥°$ ، هـ ∈ $\overset{\frown}{ب جـ}$ الأكبر

أوجد ① $ق(\angle أ جـ ب)$

② $ق(\angle ب هـ جـ)$

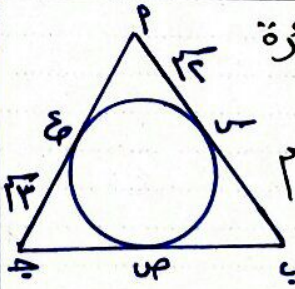


مثال ٥ $\Delta أ ب جـ$ يمس الدائرة من الخارج في س ، ص ، ع

، فإذا كان محيط $\Delta أ ب جـ = ٣٦$ سم

، $أ س = ٢٢$ سم ، $جـ ع = ٢٣$ سم

احسب طول $\overline{ب ص}$



البرهان ∵ $أ س = أ ع$ قطعتان مماسيتان

∴ $أ س = أ ع = ٢٢$

∴ $جـ ص = جـ ع$ قطعتان مماسيتان مرسومتان من جـ

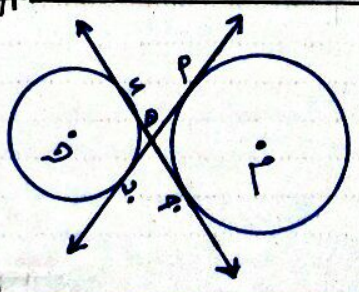
$جـ ص = جـ ع = ٢٣$

∴ محيط $\Delta أ ب جـ = ٣٦$

∴ $ب ص = \frac{٣٦ - (٢٢ + ٢٣)}{٢} = \frac{٣٦ - ٤٥}{٢} = ٢$ سم #

مثال ٦ $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـ د}$ مماسان للدائرتين م ، ن

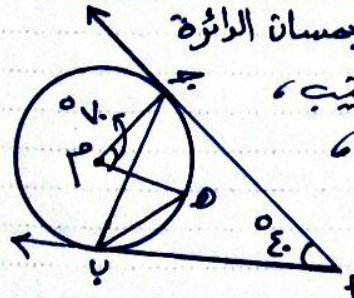
إثبت أن: $أب = جـ د$



مثال ٣ $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ يمسان الدائرة م عند ب ، جـ على الترتيب ،

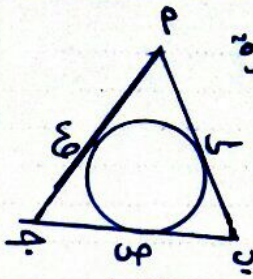
$ق(\angle ب أ جـ) = ٤٠°$ ، $ق(\angle م أ جـ) = ٧٠°$

إثبت أن: $\overline{أم}$ ينصف $\angle أ ب جـ$



[I Like Mathematics]

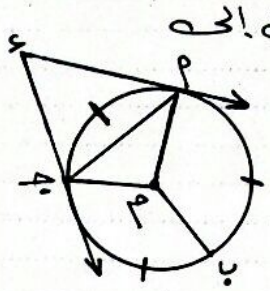
مثال ③



Δ م ب جـ يمس الدائرة من الخارج فى س ، ص ، ع
م س = ٥ سم ، ب ص = ٣ سم ،
جـ ع = ٤ سم إحسب محيط Δ م ب جـ

مثال ④

الدائرة م انقسمت إلى ثلاثة أقواس متساوية فى الطول ، ء م ، ء جـ يمسانها عند ء



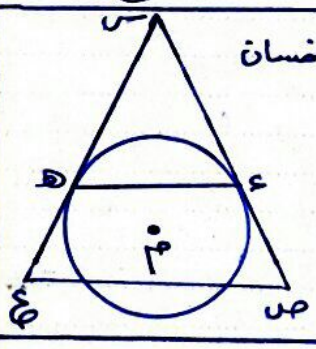
① أوجد ق (م م ب)

② إثبت أن :

أولاً : الشكل م م جـ ء رباعى دائرى

ثانياً : Δ م جـ ء متساوى الأضلاع

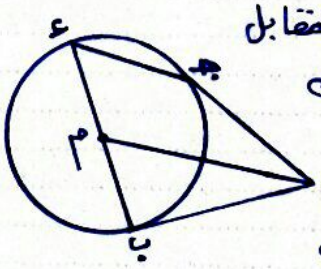
مثال ⑤



س ص ، س ع خصمان للدائرة م عند ء ، هـ ،
فإذا كان ء هـ // ص ع
فأثبت أن الشكل ء ص ع هـ رباعى دائرى

مثال ⑥

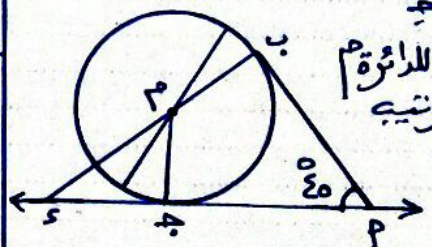
فى الشكل المقابل



م ب ، م جـ قطعتان مماستان للدائرة م
ب ء قطر فى الدائرة إثبت أن
م م // جـ ء

مثال ⑦

م ب ، م جـ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، جـ على الترتيب
ق (م) = ٤٥° ،
إثبت أن



① الشكل م ب م جـ رباعى دائرى

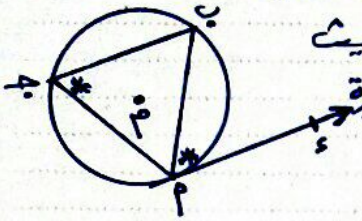
② ء م = م ب + م ب

سبحان الله وبحمده ∴
∴ سبحان الله العظيم

الدرس السادس

[عكس نظرية الزاوية المماسية]

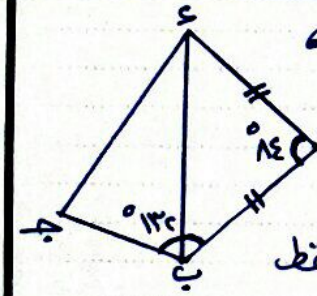
إذا رُسم شعاع من إحدى نقطتى النهاية لوتر فى دائرة بحيث كان قياس الزاوية المحصورة بين هذا الشعاع والوتر يساوى قياس الزاوية المحيطية المرسومة على نفس الوتر من الجهة الأخرى فإن هذا الشعاع يكون مماساً للدائرة .



أى أن إذا كان ق (جـ) = ق (ب م ء)
فإنه نستنتج أن م ء مماس للدائرة م عند م

مثال ①

م ب جـ ء شكل رباعى ،
م ب = م ء ، ق (م) = ٨٤° ،
ق (م ب جـ) = ١٣٢°

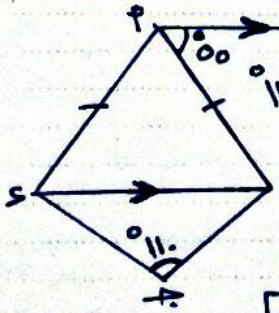


إثبت أن
ب جـ مماسة للدائرة المارة بالنقط م ، ب ، ء

البرهان فى Δ م ب ء ∵ م ب = م ء
∴ ق (م) = ٨٤°
∴ ق (م ب ء) = (١٨٠° − ٨٤°) / ٢ = ٤٨°
∴ ق (ء ب جـ) = ١٣٢° − ٤٨° = ٨٤°
∴ ق (ب م ء) = ق (ء ب جـ) = ٨٤°
وهما مشتركان فى الوتر ء ب
∴ ب جـ مماسة للدائرة المارة بالنقط م ، ب ، ء

مثال ②

م هـ // ء ب ،
ق (ب م هـ) = ٥٥° ، ق (جـ) = ١١٠°



إثبت أن م ب = م ء
① الشكل م ب جـ ء رباعى دائرى
② م هـ مماس للدائرة المارة برؤوس الشكل م ب جـ ء

البرهان
∵ م ب = م جـ ∵ م هـ // ب ء
∴ ق (هـ م ب) = ق (م ب ء) = ٥٥° بالتبادل

∴ ق(∠أ ب ء) = ق(∠أ ء ب) = ٥٥°

في Δ أ ب ء ق(∠ب أ ء) = ١٨٠° − (٥٥° + ٥٥°)

∴ ق(∠ب أ ء) = ١٨٠° − ١١٠° = ٧٠°

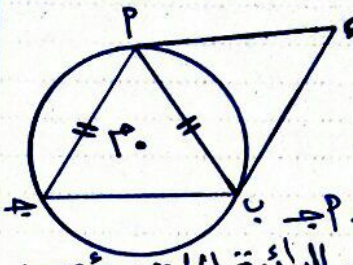
∴ في الشكل الرباعي أ ب جـ ء

∴ ق(∠ب أ ء) + ق(∠جـ) = ٧٠° + ١١٠° = ١٨٠°

وهما متقابلتان متكاملتان

∴ أ ب جـ ء شكل رباعي دائري

مثال ٣



ء أ ، ء ب قطعتان مماستان للدائرة م

عندما أ ، ب حيث أ ب = أ جـ ب

إثبات أن أ جـ ↔ مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب ء

البرهان في Δ أ ب جـ ∵ أ ب = أ جـ

∴ ق(∠أ ب جـ) = ق(∠أ جـ ب) ← ①

∴ ء أ ، ء ب قطعتان مماستان مرسومتان من ء ∴ ء أ = ء ب

∴ ق(∠ء أ ب) = ق(∠ء ب أ) ← ②

∴ ق(∠ب أ جـ) = ق(∠ء أ ب)

محيطيه ومماسيه مرسومتان على نفس القوس أ ب

∴ ق(∠ء أ ب) = ق(∠ء ب أ) = ق(∠أ ب جـ)

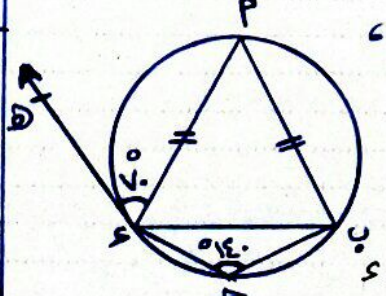
= ق(∠أ جـ ب)

ومن خواص المثلث

∴ ق(∠ب ء أ) = ق(∠ب أ جـ)

∴ أ جـ ↔ مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب ء

مثال ٤



أ ب = أ ء ،

ق(∠جـ) = ١٤٠°

ق(∠أ ء هـ) = ٧٠°

إثبات أن

ء هـ ↔ مماس للدائرة عند ء

البرهان ∵ أ ب جـ ء شكل رباعي دائري

∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − ١٤٠° = ٤٠°

∵ أ ب = أ ء ∴ Δ أ ب ء متساوي الساقين

∴ ق(∠أ ب ء) = ق(∠أ ء ب) = ١٨٠° − ق(∠أ) / ٢

= ١٨٠° − ٤٠° / ٢ = ٧٠°

∴ ق(∠أ ب ء) = ق(∠أ ء هـ) = ٧٠°

∵ ء هـ مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب ء

صرسوصاعدين قاعدة واحدة أ ء

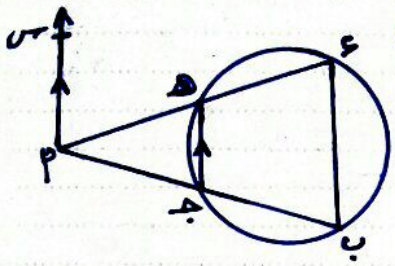
(تمارين)

١ أ ب جـ ء متوازي أضلاع فيه أ جـ = ب جـ

إثبت أن: ↔ جـ ء مماس للدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ

٢ الشكل ب جـ هـ ء رباعي دائري ، أ س // جـ هـ

يرهن أن أ س ↔ مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب ء



٣ ق(∠أ م جـ) = ١٣٠°

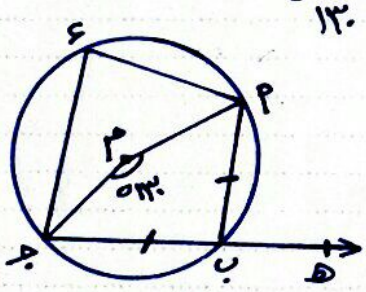
، أ ب = ب جـ

فأوجد كلاً من:

ق(∠ء) ، ق(∠أ ب هـ)

ثم إثبت أن:

↔ جـ هـ يمس الدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، م



٤ أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، ↔ أ ء ينصف ∠ب أ جـ ويقطع ب جـ في ء والدائرة في هـ إثبت أن:

↔ ب هـ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، ء

٥ أ ب قطر في الدائرة م حيث أ ب = ٣٨ ، أ جـ وتر فيها ، ↔ ب ء مماساً للدائرة يقطع أ جـ في ء فإذا كان: ب ء = ٢٦

① إثبت أن: ↔ أ ب مماس للدائرة المارة برؤوس Δ جـ ب ء

② أوجد: طول أ جـ

